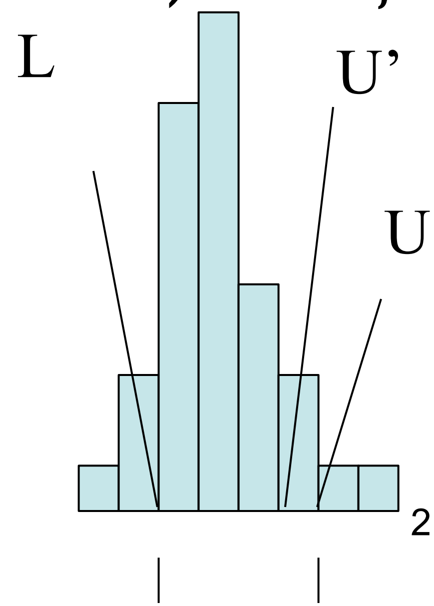
Υπολογιστική Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

Όρια Πιστότητας (Confidence Limits)

Τα όρια πιστότητας –Confidence Limits (CL)

Τα όρια πιστότητας μιας μέτρησης

- Μπορεί να αναφέρονται : 68%, 95%, 99%
- Μπορεί να είναι άνωτερο (Upper), κατώτερο (Lower), ή και τα δύο (twosided) x<U, x>L, L<x<U

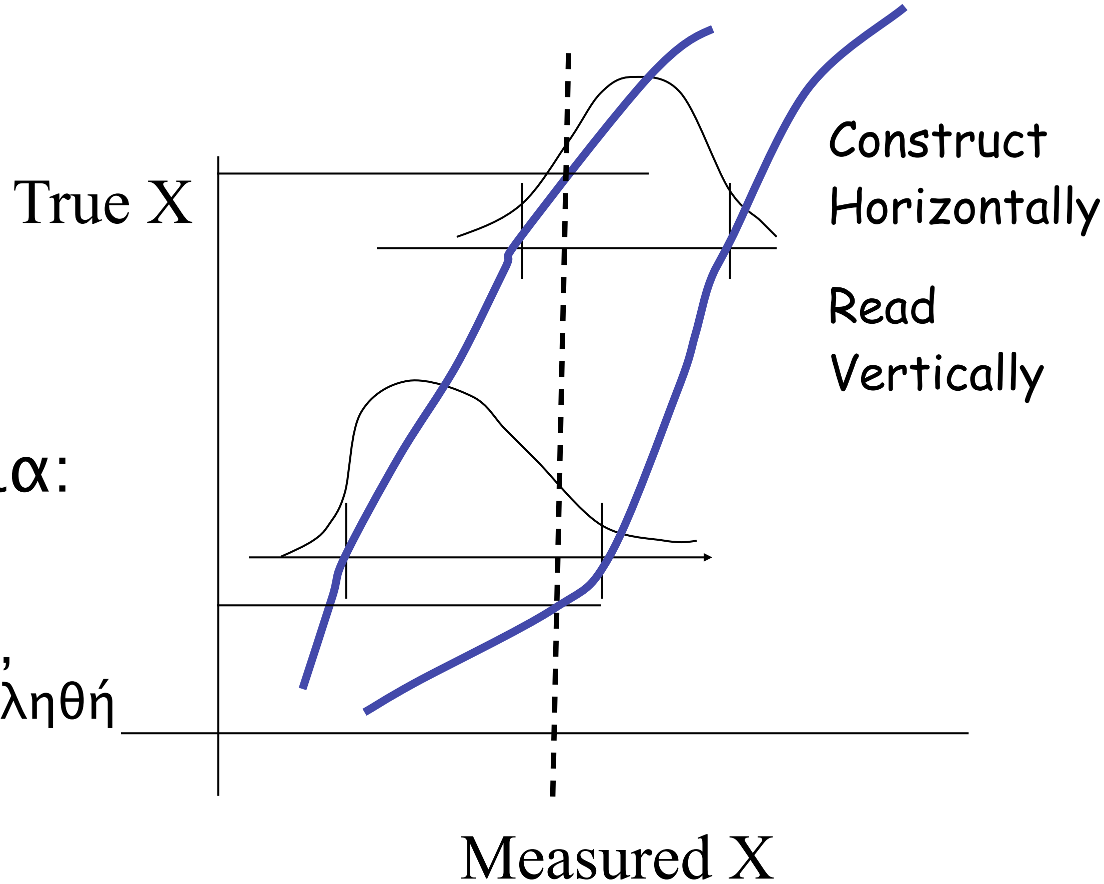


CL κατα την 'συχναζουσα' πιθανότητα- Frequentist

- Μετρούμε μήκος με ένα μέτρο:
- σφάλμα gauss 0.1 (1σ)
- Για πραγματική τιμή x_T μετρούμε x_M με κατανομή gauss
- Το x_M διαφερει απο το $x_T \leq 0.1$ στο 68% των μετρήσεων ΚΑΙ
- Το x_T διαφερει απο το $x_M \leq 0.1$ στο 68% των μετρήσεων
- Μπορούμε να πούμε $x_M-0.1<x_T<x_M+0.1$ @68%CL

Οι ζώνες πιστότητας–Confidence Belts

Για πιο περίπλοκες κατανομές (όχι gauss)δεν είναι τόσο απλό



Αλλά η αρχή είναι ίδια:

--έστω οτι γνωρίζω απο ανεξάρτητη μέθοδο την κατανομή της μεταβλητής Χ, που περιλαμβάνει και την αληθή τιμή True X

--απο τον estimator Θ και τις μετρήσεις μου υπολογίζω Θobs

Το πρόβλημα της CL κατα την 'συχναζουσα' πιθανότητα-Frequentist

- Αρνητικά Lower και/ή Upper όρια για 'θετικές' μετρούμενες ποσότητες : μέτρηση του βάρους (δοχείο–C+περιεχόμενο–M) με σφάλμα gauss.
  Μετρούμε R : R– σ< M+C < R+σ @ 68%, R–C–σ<M<R–C+σ@68%
- 'εστω: C=50, R=55, σ=10 => –5<M<5 @68%
- Έστω: C=50, R=31, σ=10 => –29<M<–9 @68% !

Poisson: Signal + Background

Background mean 2.50

Detect 3 events:

Total < 6.68 @ 95%

Signal<4.18@95%

Detect 0 events

Total < 2.30 @ 95%

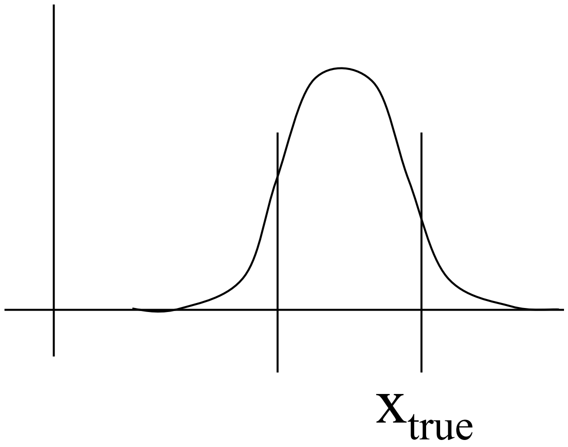
Signal < -0.20 @ 95%

Τα όρια είναι μαθηματικά σωστά αλλά χωρίς νόημα!

Η προσέγγυση στο πρόβλημα με την πιθανότητας Bayes

$$P(Theory\,|\,Data) = \frac{P(Data\,|\,Theory)}{P(Data)}P(Theory)$$

- Μετρούμε ποσότητα x με κατανομή gauss και πραγματική τιμή X
- ΔΕΝ υπολογίζουμε CL's
- Θεωρούμε οτι ΔΕΝ έχουμε καμμια γνώση της πραγματικής τιμής και της μέτρησης
- P(Data|Theory) είναι Gaussian
- P(Theory|Data) είναι Gaussian



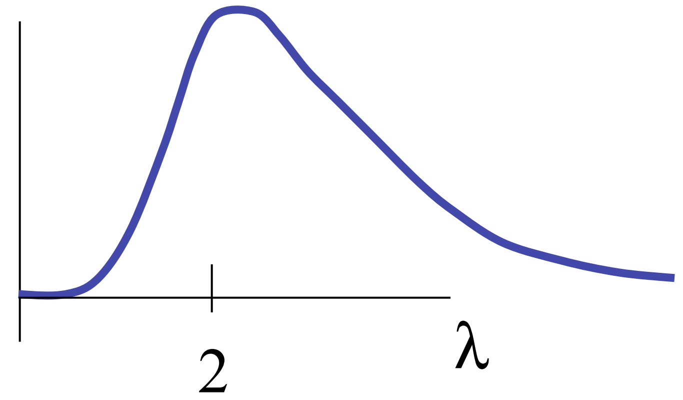
$$P(\mu_t|x_0) = \mathcal{L}(x_0|\mu_t)P(\mu_t)/P(x_0).$$

Τα όρια που υπολογίζουμε είναι όπως και με την συχνάζουσα πιθανότητα για κατανομή gauss

Bayesian Confidence Intervals

- Έστω ότι παρατηρούμε 2 γεγονότα

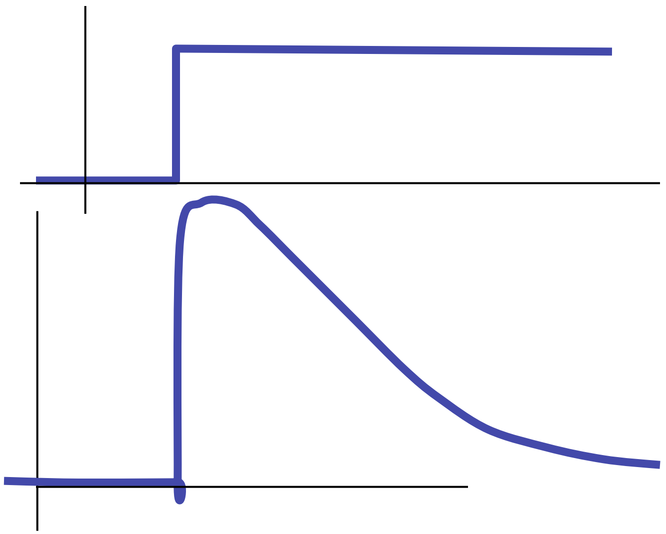
$$P(\lambda;2) \propto P(2;\lambda) = e^{-\lambda}\,\lambda^{2}$$



- Κανονικοποιούμε
- Αν γνωρίζουμε ότι:

background mean είναι 1.7, τότε γνωρίζουμε ότι $\lambda > 1.7$

- Πολλαπλασιάζουμε, κανονικοποιούμε και ερμηνεύουμε



Παράδειγμα για κατά Bayes CL

- Έστω ότι σύμφωνα με την μέτρησή μας η μάζα είναι: -0.5±0.2 *gr*
- Υπολογίζουμε την πιθανότητα η μάζα να ειναι 0 (2.5σ)
- 10% αυτής της πιθανότητας αντιστοιχεί σε 3.24σ (πίνακες για one-tailed gaussian integral - %probability)
- =>το 90% confidence upper limit ειναι: -0.5+3.24x0.2=0.15 *gr*
- Με την υπόθεση οτι η πραγματική τιμή X μπορεί με ίση πιθανότητα να πάρει ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ τιμή >0

Τι κάνουμε στην Φυσική?
Feldman-Cousins Unified Method

- Στην ιδανική περίπτωση:επιλέγουμε στρατηγική, εξετάζουμε τα δεδομένα, δινουμε τα αποτελέσματα….

- Στην πράξη: εξετάζουμε τα δεδομένα, επιλέγουμε στρατηγική, δίνουμε αποτελέσματα!

Example:

You have a background of 3.2

Observe 5 events? Quote one-sided upper limit (9.27-3.2 =6.07@90%)

Observe 25 events? Quote two-sided limits

Feldman-Cousins Unified Method

TABLE V. 90% C.L. intervals for the Poisson signal mean μ, for total events observed n_0, for known mean background b ranging from 6 to 15.

$n_0 \backslash b$	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0
0	*0.00, 0.97*	*0.00, 0.95*	*0.00, 0.94*	*0.00, 0.94*	*0.00, 0.93*	*0.00, 0.93*	*0.00, 0.92*	*0.00, 0.92*	*0.00, 0.92*	*0.00, 0.92*
1	0.00, 1.14	*0.00, 1.10*	*0.00, 1.07*	*0.00, 1.05*	*0.00, 1.03*	*0.00, 1.01*	*0.00, 1.00*	*0.00, 0.99*	*0.00, 0.99*	*0.00, 0.98*
2	0.00, 1.57	0.00, 1.38	0.00, 1.27	*0.00, 1.21*	*0.00, 1.15*	*0.00, 1.11*	*0.00, 1.09*	*0.00, 1.08*	*0.00, 1.06*	*0.00, 1.05*
3	0.00, 2.14	0.00, 1.75	0.00, 1.49	0.00, 1.37	0.00, 1.29	*0.00, 1.24*	*0.00, 1.21*	*0.00, 1.18*	*0.00, 1.15*	*0.00, 1.14*
4	0.00, 2.83	0.00, 2.56	0.00, 1.98	0.00, 1.82	0.00, 1.57	0.00, 1.45	*0.00, 1.37*	*0.00, 1.31*	*0.00, 1.27*	*0.00, 1.24*
5	0.00, 4.07	0.00, 3.28	0.00, 2.60	0.00, 2.38	0.00, 1.85	0.00, 1.70	0.00, 1.58	0.00, 1.48	*0.00, 1.39*	*0.00, 1.32*
6	0.00, 5.47	0.00, 4.54	0.00, 3.73	0.00, 3.02	0.00, 2.40	0.00, 2.21	0.00, 1.86	0.00, 1.67	0.00, 1.55	*0.00, 1.47*
7	0.00, 6.53	0.00, 5.53	0.00, 4.58	0.00, 3.77	0.00, 3.26	0.00, 2.81	0.00, 2.23	0.00, 2.07	0.00, 1.86	0.00, 1.69
8	0.00, 7.99	0.00, 6.99	0.00, 5.99	0.00, 5.05	0.00, 4.22	0.00, 3.49	0.00, 2.83	0.00, 2.62	0.00, 2.11	0.00, 1.95
9	0.00, 9.30	0.00, 8.30	0.00, 7.30	0.00, 6.30	0.00, 5.30	0.00, 4.30	0.00, 3.93	0.00, 3.25	0.00, 2.64	0.00, 2.45
10	0.22,10.50	0.00, 9.50	0.00, 8.50	0.00, 7.50	0.00, 6.50	0.00, 5.56	0.00, 4.71	0.00, 3.95	0.00, 3.27	0.00, 3.00
11	1.01,11.81	0.02,10.81	0.00, 9.81	0.00, 8.81	0.00, 7.81	0.00, 6.81	0.00, 5.81	0.00, 4.81	0.00, 4.39	0.00, 3.69
12	1.57,13.00	0.83,12.00	0.00,11.00	0.00,10.00	0.00, 9.00	0.00, 8.00	0.00, 7.00	0.00, 6.05	0.00, 5.19	0.00, 4.42
13	2.14,14.05	1.50,13.05	0.65,12.05	0.00,11.05	0.00,10.05	0.00, 9.05	0.00, 8.05	0.00, 7.05	0.00, 6.08	0.00, 5.22
14	2.83,15.50	2.13,14.50	1.39,13.50	0.47,12.50	0.00,11.50	0.00,10.50	0.00, 9.50	0.00, 8.50	0.00, 7.50	0.00, 6.55
15	3.48,16.52	2.56,15.52	1.98,14.52	1.26,13.52	0.30,12.52	0.00,11.52	0.00,10.52	0.00, 9.52	0.00, 8.52	0.00, 7.52
16	4.07,17.99	3.28,16.99	2.60,15.99	1.82,14.99	1.13,13.99	0.14,12.99	0.00,11.99	0.00,10.99	0.00, 9.99	0.00, 8.99
17	5.04,19.02	4.11,18.02	3.32,17.02	2.38,16.02	1.81,15.02	0.98,14.02	0.00,13.02	0.00,12.02	0.00,11.02	0.00,10.02
18	5.47,20.16	4.54,19.16	3.73,18.16	3.02,17.16	2.40,16.16	1.70,15.16	0.82,14.16	0.00,13.16	0.00,12.16	0.00,11.16
19	6.51,21.51	5.51,20.51	4.58,19.51	3.77,18.51	3.05,17.51	2.21,16.51	1.58,15.51	0.67,14.51	0.00,13.51	0.00,12.51
20	7.55,22.52	6.55,21.52	5.55,20.52	4.55,19.52	3.55,18.52	2.81,17.52	2.23,16.52	1.48,15.52	0.53,14.52	0.00,13.52

PHYSICAL REVIEW D VOLUME 57, NUMBER 7 1 APRIL 1998

Unified approach to the classical statistical analysis of small signals

Maximum Likelihood and Confidence Levels

ML estimator (large N) has variance given by MVB

$$\sigma_{\hat{a}}^{2} = V(\hat{a}) = \frac{-1}{\left\langle \frac{d^2 \ln L}{da^2} \right\rangle}$$

(Minimum Variance Bound)

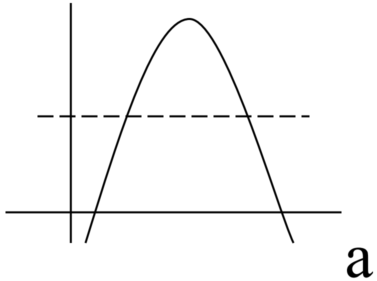
At peak $\ln L \approx L_{\max} + \frac{(a-\hat{a})^2}{2} \left. \frac{d^2 \ln L}{da^2} \right|_{a=\hat{a}}$ For large N

Ln L is a parabola (L is a Gaussian)

$$\ln L = L_{\max} - \frac{(a-\hat{a})^2}{2\sigma_{\hat{a}}^2}$$

Falls by ½ at $a = \hat{a} \pm \sigma_{\hat{a}}$

Falls by 2 at $a = \hat{a} \pm 2\sigma_{\hat{a}}$



Read off 68% , 95% confidence regions

MVB (minimum variance bound) example

N Gaussian measurements: estimate μ $$P(x_i;\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x_i-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Ln L given by $$-\sum_i\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}-N\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$$

Differentiate twice wrt μ $$-\frac{N}{\sigma^2}$$

Take expectation value – but it's a constant

Invert and negate: $$V(\hat{\mu})=\frac{\sigma^2}{N}$$

Another MVB example

N Gaussian measurements: estimate σ

Ln L still given by

Differentiate twice wrt σ

$$-\sum_i \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} - N\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$$

Take expectation value $\langle (x_i-\mu)^2 \rangle = \sigma^2 \; \forall \; i$

Gives

$$-\sum_i \frac{3(x_i-\mu)^2}{\sigma^4} + \frac{N}{\sigma^2}$$

Invert and negate:

$$-\frac{2N}{\sigma^2}$$

$$V(\hat{\sigma}) = \frac{\sigma^2}{2N}$$

ML for small N

ln L is not a parabola

Argue: we could (invariance) transform to some a′ for which it is a parabola

We could/should then get limits on a′ using standard L_{max}-½ technique

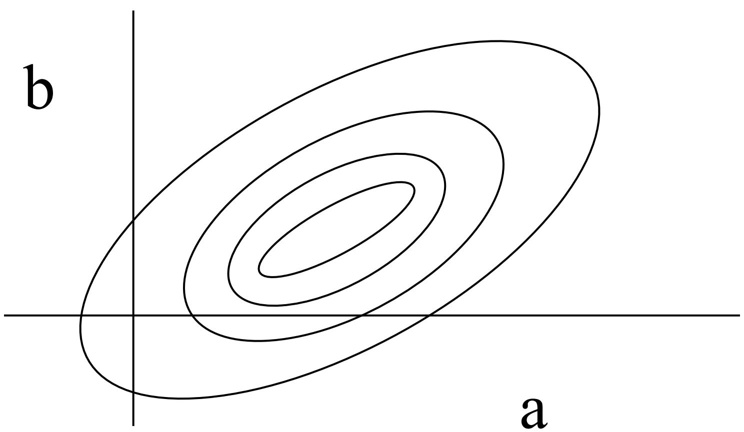
These would translate to limits on a

These limits would be at the values of a for which L= L_{max}-½

So just do it directly

Multidimensional ML

- L is multidimensional Gaussian



For 2-d 39.3% lies within 1σ
i.e. within region bounded by
$L=L_{max}-\frac{1}{2}$

For 68% need $L=L_{max}-1.15$

Construct region(s) to test using numbers from integrated χ^2 distribution