

Υπολογιστική Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

Εαρινό Εξάμηνο 2016–2017

Στατιστική
Πιθανότητες–Κατανομές

Χαρά Πετρίδου

Πιθανότητες



Kolmogorov
Axioms (1933)

- **Ορισμός 1 -Μαθηματικός:** $P(A)$ είναι ο αριθμός που πληρεί τα αξιώματα του Kolmogorov

For all $A \subset S, P(A) \geq 0$

$$P(S) = 1$$

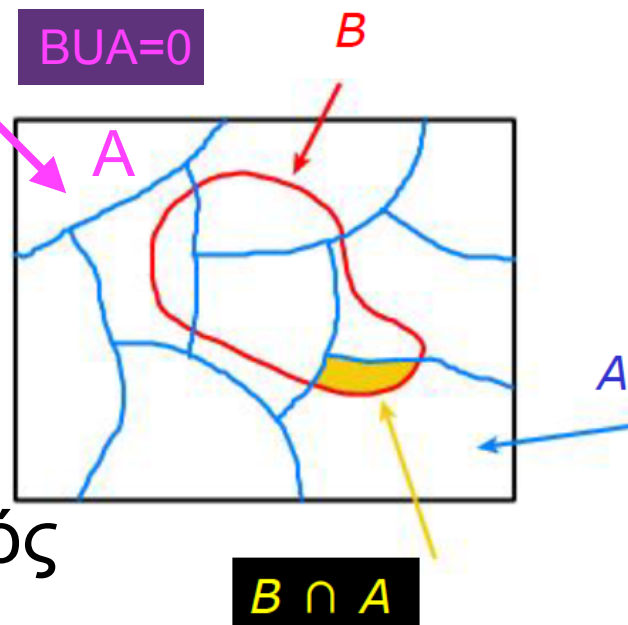
If $A \cap B = \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A) \geq 0$$

$$P(A_1 \vee A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

$$\sum P(A_i) = 1$$

- ΔΕΝ δίνει πληροφορία ο μαθηματικός ορισμός!



Πιθανότητες

- Ορισμός 2 : Κλασσικός ορισμός

Η πιθανότητα $P(A)$ είναι η ιδιότητα ενός αντικειμένου/γεγονότος A , που καθορίζει πόσο συχνά συμβαίνει το γεγονός A . Υπολογίζεται με βάση την συμμετρία για εξίσου πιθανά γεγονότα.

Γεγονότα όχι το ίδιο πιθανά τα θεωρούμε εξίσου πιθανά

Παράδειγμα : ρίχνουμε ένα νομισμα : $P(H) = 1/2$

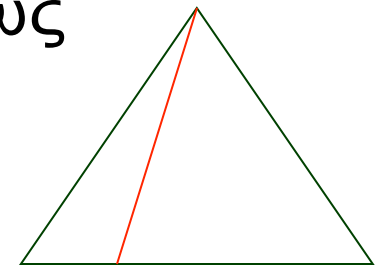
Ρίχνουμε δύο ζάρια : $P(8) = 5/36$? ή $P(8) = 6/36$?

Προβλήματα με τον κλασσικό ορισμό

1. Πότε πρόκειται για εξίσου πιθανές περιπτώσεις? **Αν ρίξουμε δύο νομίσματα έχουμε 3 ή 4 ίσες δυνατότητες?**

Έχουμε λύση

2. Τι κάνουμε σε περιπτώσεις που έχουμε συνεχείς μεταβλητές? Πως να χωρίσουμε ένα τρίγωνο σε δύο τυχαία μέρη?



Δεν Έχουμε λύση

Πιθανότητες - Συχνότητα

- **Ορισμός 3 -Frequentist** ('συχνάζουσα' πιθανότητα)

Η πιθανότητα $P(A)$ είναι το όριο του λόγου $N(A)/N$ (σε ένα σύνολο N αντικειμένων εκ των οποίων κάποια με ιδιότητα A)

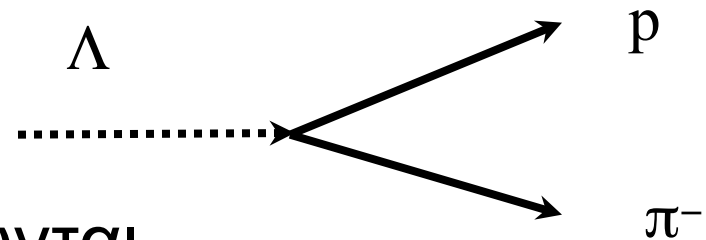
$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A)}{N}$$

Πρόβλημα (περιορισμός) με τον ορισμό της 'συχνάζουσας' πιθανότητας

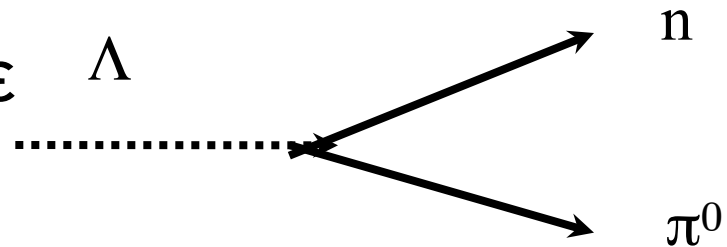
- Η $P(A)$ εξαρτάται και απο το A και απο το σύνολο N . Η πιθανότητα που υπολογίζουμε μπορεί να είναι παραπλανητική αν βασιστούμε στην συχνότητα του γεγονότος :
... 10 στους 30 ανθρώπους σε ένα σύνολο είναι 'πλούσιοι' $\Rightarrow P(\text{πλούσιος}) = 1/3 !!!$

Συνέπειες για την Κβαντομηχανική (QM)

- Στην QM υπολογίζουμε πιθανότητες



- Οι πιθανότητες εξαρτώνται από το **είδος των γεγονότων** που έχουμε (π.χ. Λ^0) και **την αλληλεπίδραση**



PDG: $P(p\pi^-)=0.639$

$P(n\pi^0)=0.358$

Το πρόβλημα με τον ορισμό της ‘συχνάζουσας’ πιθανότητας

- ΔΕΝ μπορεί να εφαρμοστεί σε μεμονωμένα γεγονότα !
 - ... η έκφραση ‘πιθανόν να βρέξει αύριο’ ΔΕΝ είναι επιστημονική !!!
Ενω η έκφραση : ‘η δήλωση “ πιθανόν να βρέξει αύριο” είναι σωστή’ είναι
 - Η ανακάλυψη ή όχι του Higgs
 - Η ανακάλυψη ή όχι σκοτεινής ύλης

Ορισμός της υποκειμενικής πιθανότητας (Bayesian)



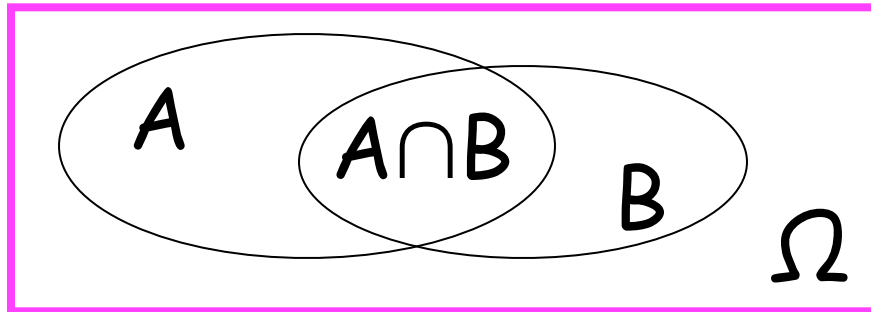
Thomas Bayes (1702–1761)

*An essay towards solving a
problem in the doctrine of chances,*
Philos. Trans. R. Soc. **53** (1763) 370.

- $P(A)$ είναι η πιθανότητα που **δίνουμε** στην ιδιότητα A να υπάρξει.
- Το A μπορεί να είναι ο,τιδήποτε. Νέα θεωρία, νέο σωματίδιο, διάσπαση σωματιδίου,... βροχή, ... ένα στοίχημα...

Το Θεώρημα του Bayes

- Η υπό όρους πιθανότητα(conditional probability) : $P(A|B)$ είναι η πιθανότητα των κοινών σημείων των A και B σε σχέση με το σύνολο B και η $P(A \cap B)$ σε σχέση με το Ω



- $$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$
$$= P(B|A) \cdot P(A) \Rightarrow$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)}{P(B)} P(A)$$

Γνωρίζουμε την πιθανότητα να συμβεί B όταν συμβαίνει A και υπολογίζουμε την αντίστροφη πιθανότητα

Το Θεώρημα του Bayes

- Από την υπό όρους πιθανότητα (conditional probability) :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(A \cap B) = P(B \cap A) \quad P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

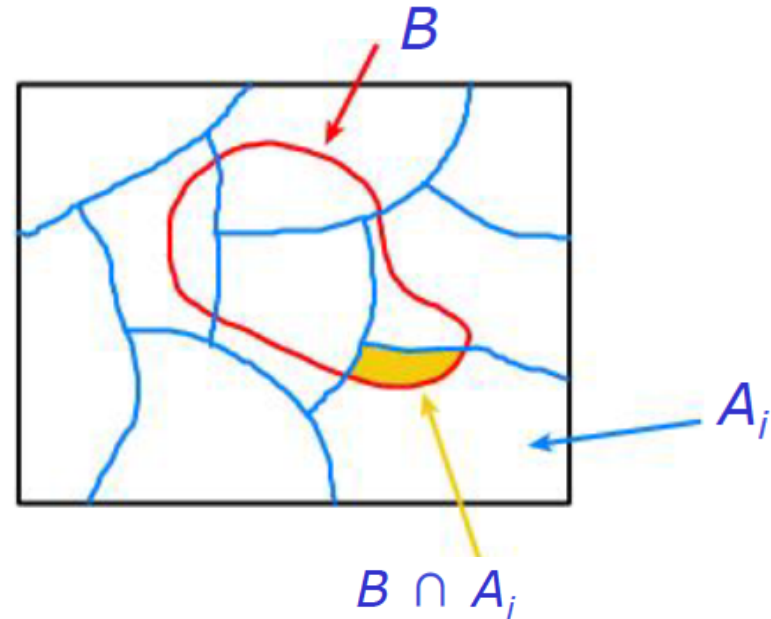
$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

S →

Το Θεώρημα Bayes ισχύει/
είναι αποδεκτό και από τις
δύο σχολές:

Bayes & Frequentist



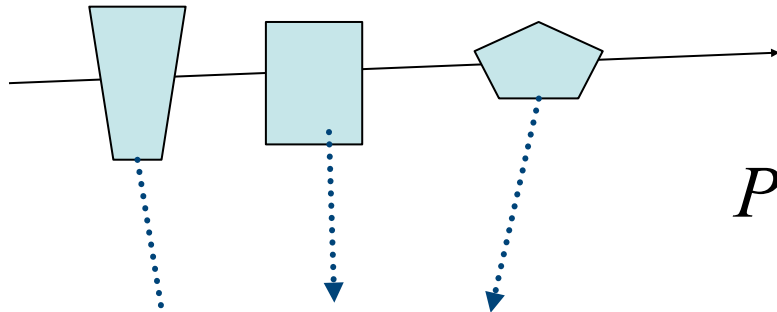
Γνωρίζουμε την πιθανότητα να συμβεί B όταν συμβαίνει A και υπολογίζουμε την αντίστροφη πιθανότητα

Εφαρμογή του Θεωρήματος Bayes για την συχνάζουσα πιθανότητα

- Ταυτοποίηση σωματιδίων

- -Τύποι σωματιδίων : e , π , μ , K , p

- -Σήματα απο ανιχνευτές: DCH, RICH, TOF, TRD



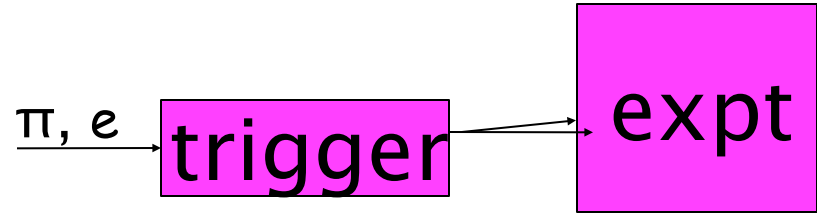
$$P'(e) = P(e | DCH) = \frac{P(DCH | e) P(e)}{P(DCH)}$$

$$P(DCH) = P(DCH | e)P(e) + P(DCH | \mu)P(\mu) + P(DCH | \pi)P(\pi) \dots$$

- Αντίστοιχα υπολογίζουμε την $P(e|RICH)$ κλπ
(δηλ. το σήμα στον ανιχνευτή να οφείλεται σε e)

Παράδειγμα χρήσης του θεωρήματος Bayes με την συχνάζουσα πιθανότητα

- Δέσμη αποτελείται από π 'ς & e 'ς
 $N_e/N_\pi = 10^{-3}$



- Το σύστημα σκανδαλισμού ($\text{Trigger} \rightarrow T$):

$$\varepsilon_e = 0.98, \varepsilon_\pi = 0.03$$

$$P(e) = 10^{-3} \quad \text{και} \quad P(\pi) = 1 - 10^{-3}$$

$$P(T|e) = 0.98, P(T|\pi) = 0.03$$

- $P(e|T) = P(T|e) * P(e) / P(T)$**
- $P(T) = P(T|e) * P(e) + P(T|\pi) * P(\pi)$**
- $P(e|T)$ είναι η πιθανότητα το εισερχόμενο σωματίο να είναι ηλεκτρόνιο όταν το σύστημα σκανδαλισμού λέει 'ναι'**

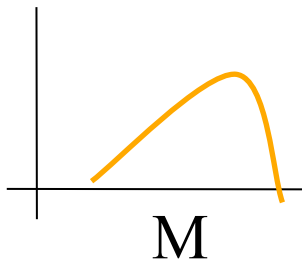
Το θεώρημα Bayes και η υποκειμενική πιθανότητα

$$P(Theory|Result) = \frac{P(Result|Theory)}{P(Result)} P(Theory)$$

- Η εκ των προτέρων ‘πίστη’ σε μια θεωρία αλλάζει με βάση τα πειραματικά αποτελέσματα :
- Εάν $(P(Result|Theory) = 0$, (η Θεωρία απαγορεύει το πειραματικό αποτέλεσμα) $\Rightarrow$ η Θεωρία δεν ισχύει
- Εάν $(P(Result|Theory) = \text{Μεγάλο}$, ενισχύεται η πίστη μας στη Θεωρία

Πρόβλημα με την υποκειμενική πιθανότητα

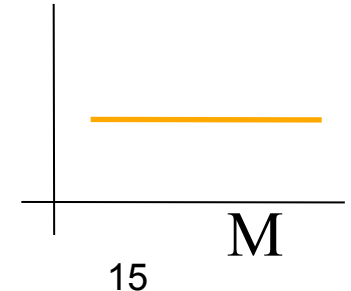
- Η πιθανότητά 'μου' $P(A)$ και η πιθανότητα $P(A)$ ενός τρίτου μπορεί να διαφέρουν...
- **Αλλά** οι επιστήμονες θάπρεπε να είναι αντικειμενικοί!
- Δικαιολογείται η άγνοια να δηλώνεται με $P(A)=\text{flat}$? (αν το A παίρνει διακριτές τιμές το ίδιο πιθανές, ναι. Αν η μεταβλητή είναι συνεχής: π.χ. M_{higgs} , τότε διαφορετική υπόθεση θα δώσει άλλα αποτελέσματα)



20/3/2017



Υπολογ. Φυσική ΣΣ



15

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας-Κατανομές

- Ορίσαμε την Πιθανότητα
- Όταν μετρούμε ένα παρατηρήσιμο μέγεθος πολλές φορές, το αποτέλεσμα x κατανέμεται σύμφωνα με μιά **κατανομή πιθανότητας (probability distribution)**
- Το αποτέλεσμα έχει μια διακύμανση είτε λόγω καποιων παραμέτρων (π.χ. ηλεκτρονικό θόρυβο) είτε λόγω διακύμανσης του φυσικού φαινομένου (π.χ. διάσπαση ή σκέδαση σωματιδίων)
- Οι κατανομές πιθανότητας μπορεί να είναι διακριτές ή συνεχείς.

Πιθανότητα και Στατιστική

- **Πιθανότητα: απο την θεωρία στα δεδομένα**
 - Υπολογίζουμε όλα τα πιθανά αποτελέσματα (συνέπειες) ενός πειράματος για συγκεκριμένο πρόβλημα
- **Στατιστική: απο τα δεδομένα στη θεωρία**
 - Λύνουμε το αντίστροφο πρόβλημα: απο τα δεδομένα προσπαθούμε να βρούμε τους κανόνες-νόμους=> **ανάλυση των δεδομένων**
 - => Υπολογισμός παραμέτρων και του σφάλματος
 - => έλεγχος της υπόθεσης: πιστότητα, συμφωνία...

Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας

- Επανειλημμένη μέτρηση -πειραματικά- μιας συνεχούς μεταβλητής x
- Ορισμός : η πιθανότητα P να μετρήσουμε μια τιμή x στο διάστημα $(x, x+dx)$ δίνεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας : probability density function $f(x)$ (p.d.f.) : $P=f(x) dx$
 - Είναι το μέτρο του πόσο συχνά η τιμή x εμφανίζεται σε ένα δείγμα

$$Norm = \int_{x \min}^{x \max} f(x') \cdot dx' = 1$$

Κατανομές-ιδιότητες

- Αναμενόμενη τιμή = Μέση τιμή

$$E[x] \equiv \int_{x \min}^{x \max} x \cdot f(x) \cdot dx = \langle x \rangle = \mu$$

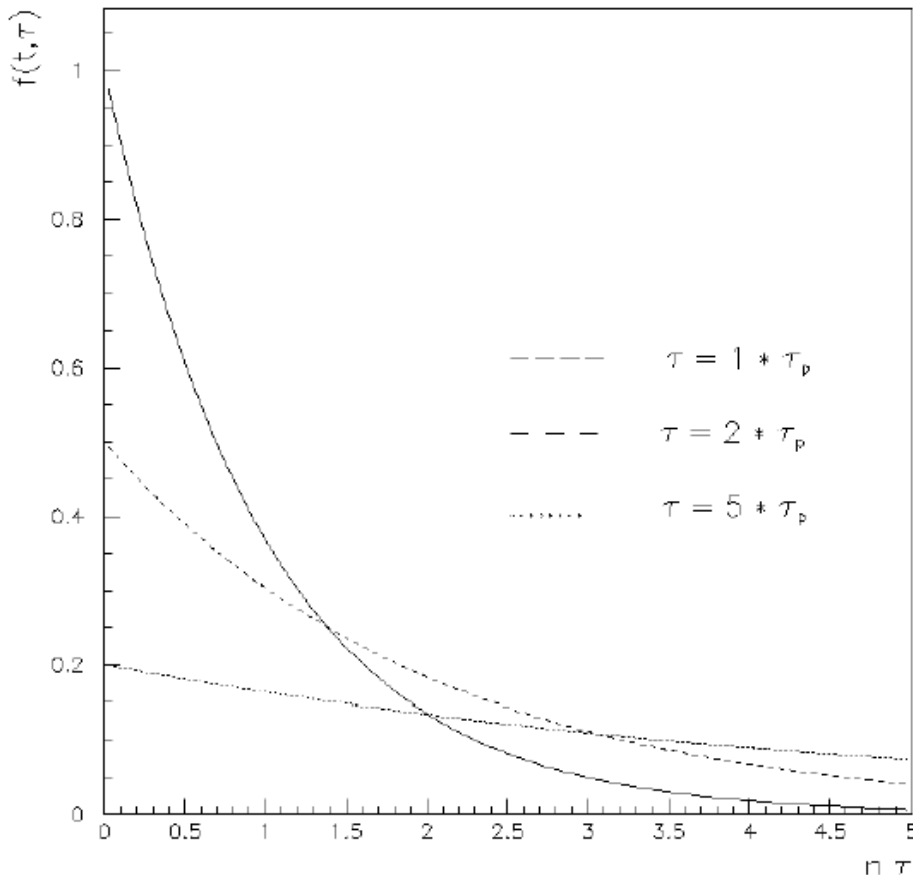
- Διασπορά -Variance = σ^2 = το τετράγωνο της απόκλισης σ Μετράει την διασπορά του x σε σχέση με την μέση τιμή

$$V[x] = E((x - \mu)^2) \equiv \int_{x \min}^{x \max} (x - \mu)^2 f(x) \cdot dx = \sigma^2$$

$$\equiv \langle (x - \mu)^2 \rangle \equiv \langle x^2 \rangle - \mu^2$$

Παραδείγματα

- Ο χρόνος ζωής t σωματιδίου στο σύστημα ηρεμίας του π.χ. Το πιόνιο : μέσος χρόνος ζωής $\tau_{\pi} = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$



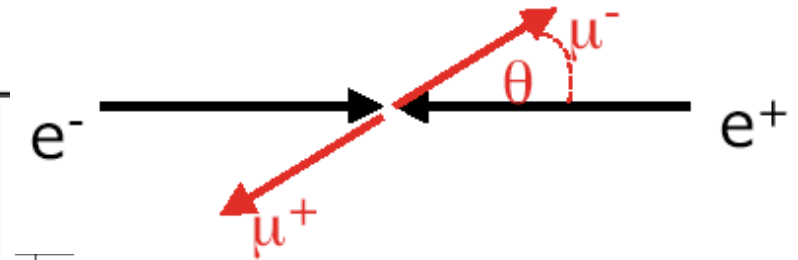
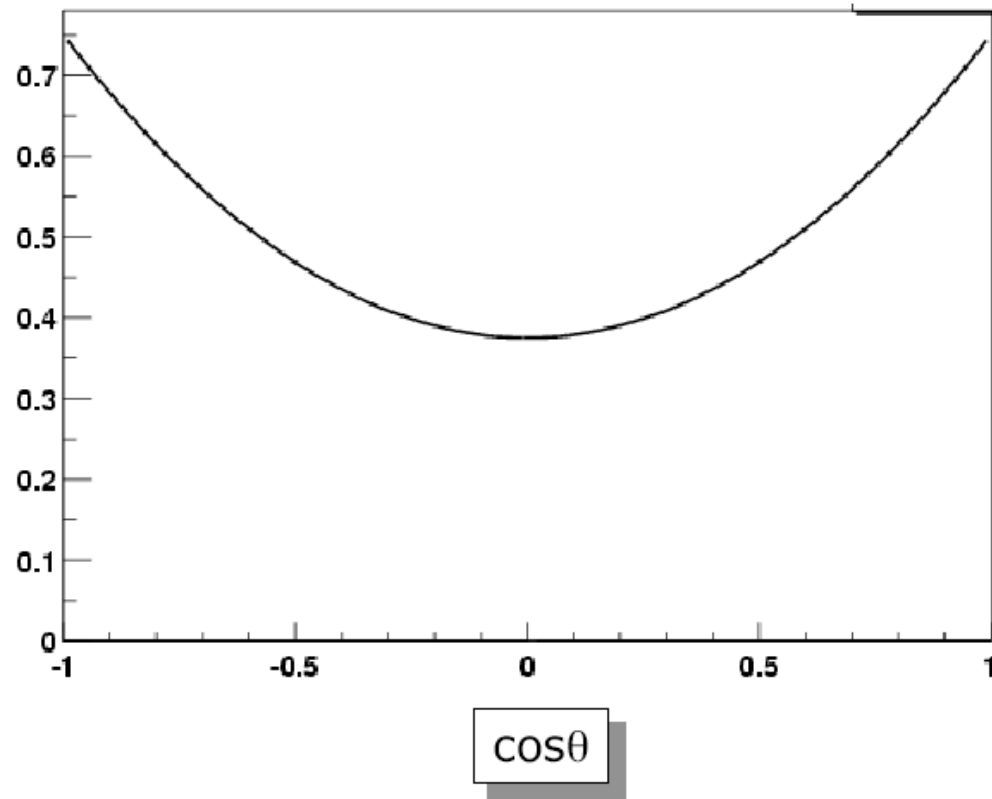
$$f(t; \tau) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$E[t] = \tau$$

$$V[t] = \tau^2$$

Παραδείγματα

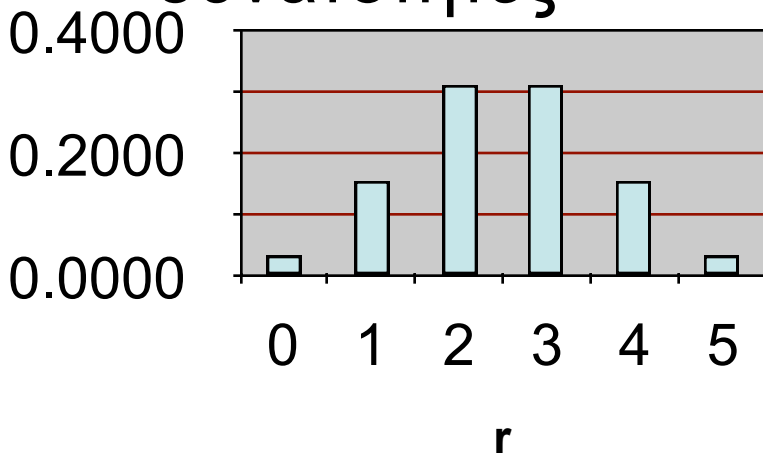
- Κατανομή της πολικής γωνίας θ του μιονίου στην σκέδαση $ee \rightarrow \mu\mu$



$$\frac{1}{\sigma_{tot}} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} =$$
$$\equiv f(\cos\theta) = \frac{3}{8} [1 + (\cos\theta)^2]$$

Κατανομές-Διακριτές κατανομές

- Διωνυμη κατανομή: η τυχαία μεταβλητή έχει δύο δυνατότητες



n προσπάθειες και r επιτυχίες
p η μεμονωμένη πιθανότητα για επιτυχία

$$P(r ; n, p) = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r}$$

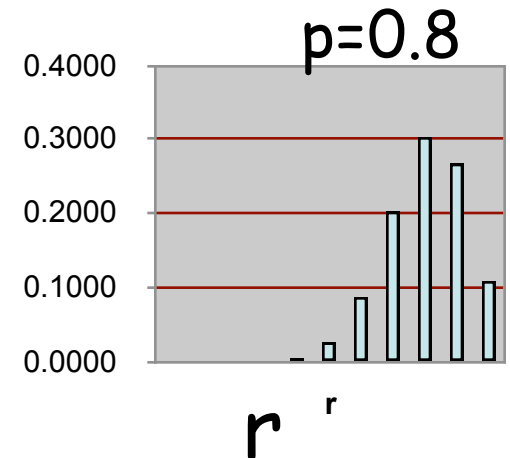
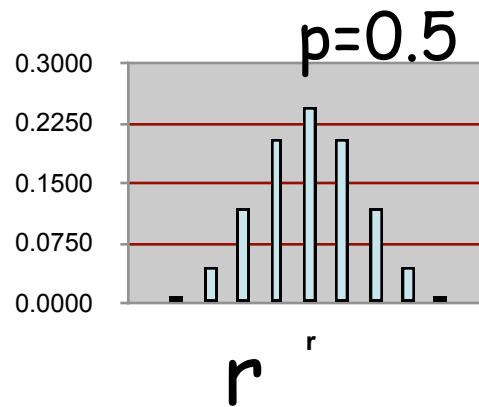
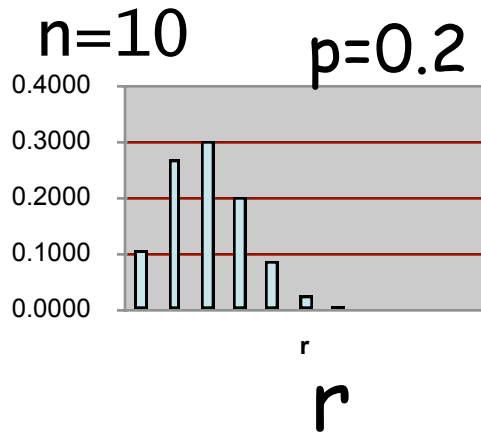
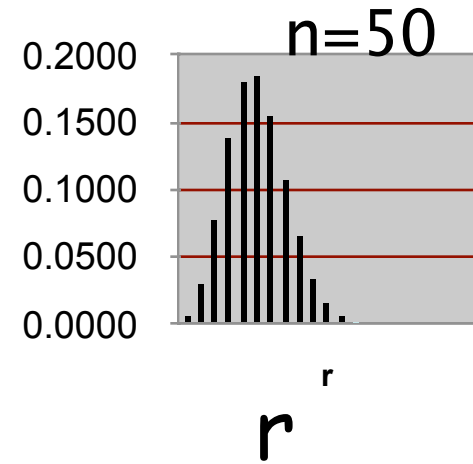
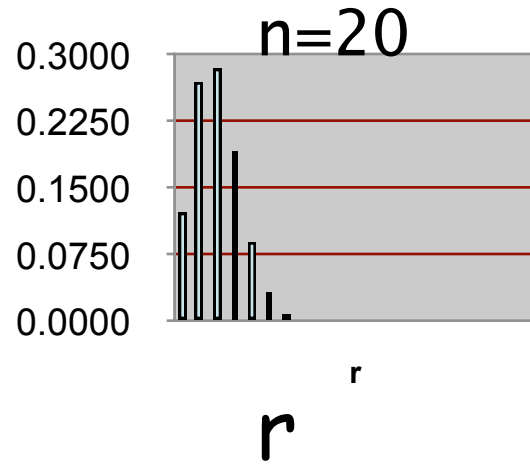
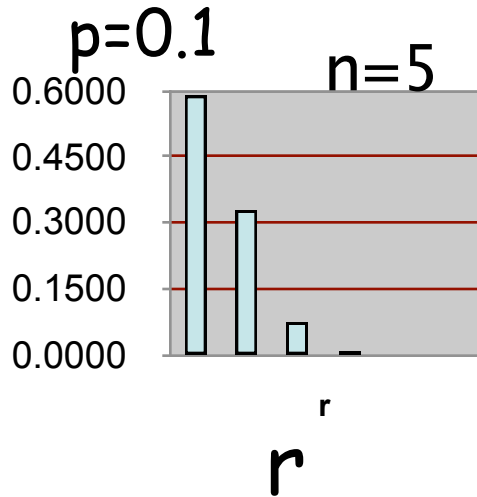
Mean

$$\mu = \langle r \rangle = \sum r P(r)$$
$$= np$$

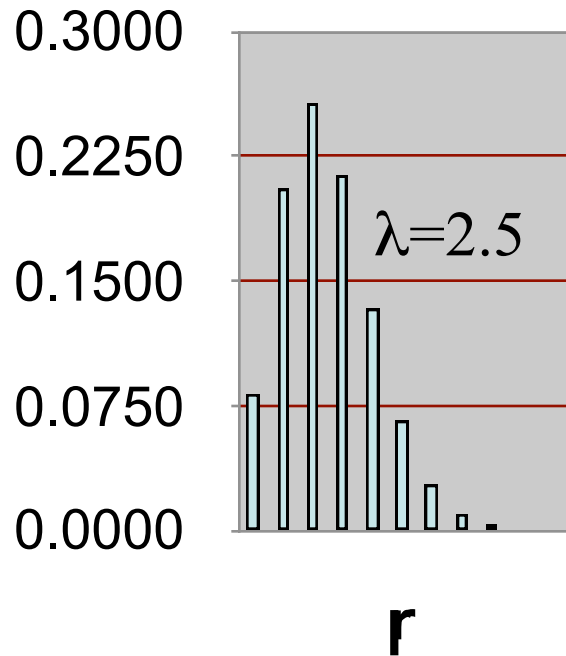
Variance

$$V \equiv \sigma^2 = \langle (r - \mu)^2 \rangle = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2$$
$$= np(1-p)$$

Παραδείγματα διώνυμης κατανομής



Κατανομή Poisson



- Δίνει την πιθανότητα να συμβούν r γεγονότα όταν ο ρυθμός των γεγονότων κατά μέσον όρο είναι λ (είναι το όριο της διωνυμικής κατανομής όταν $n \rightarrow \infty$ $p \rightarrow 0$, $np = \lambda$)

$$P(r; \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!}$$

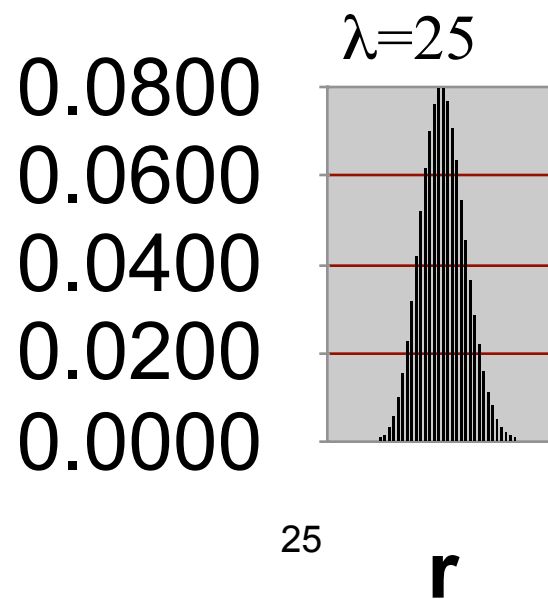
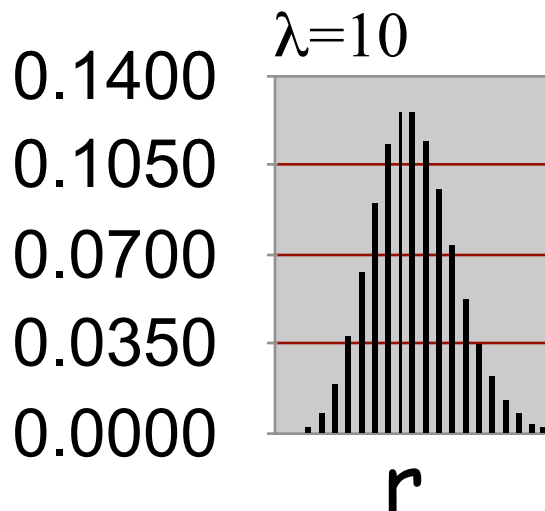
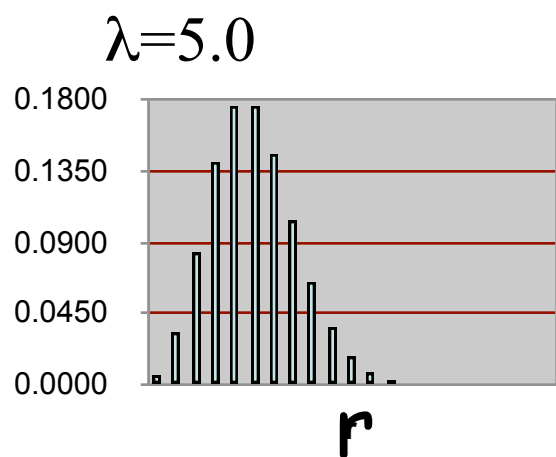
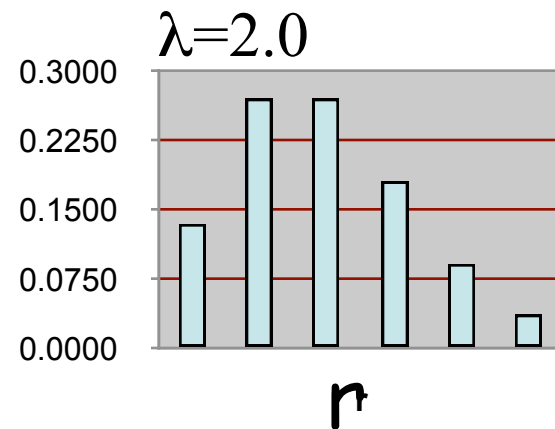
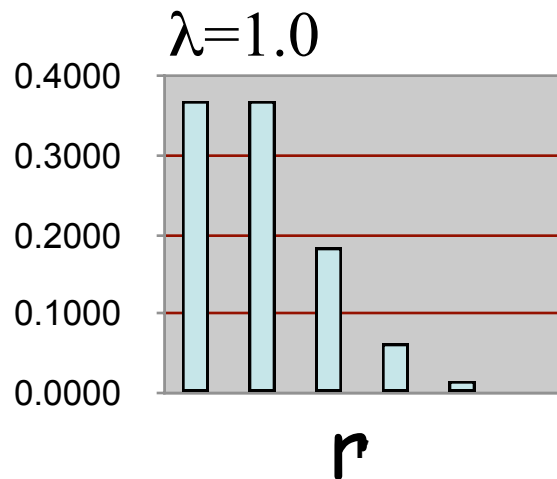
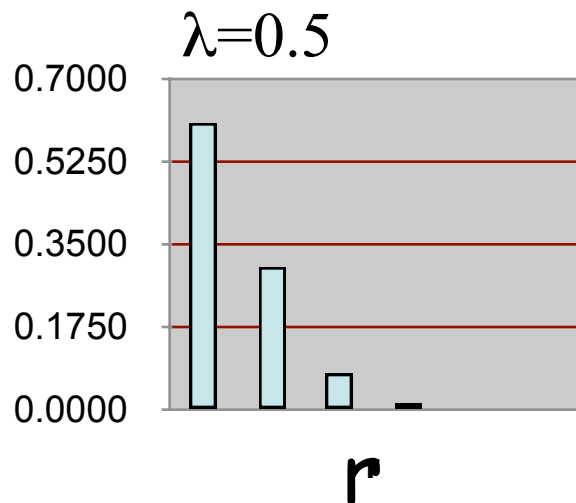
Mean

$$\begin{aligned} \mu &= \langle r \rangle = \sum r P(r) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Variance

$$\begin{aligned} V \equiv \sigma^2 &= \langle (r - \mu)^2 \rangle = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Παραδείγματα κατανομής Poisson

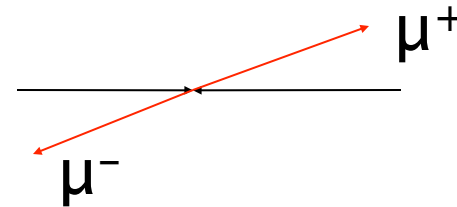
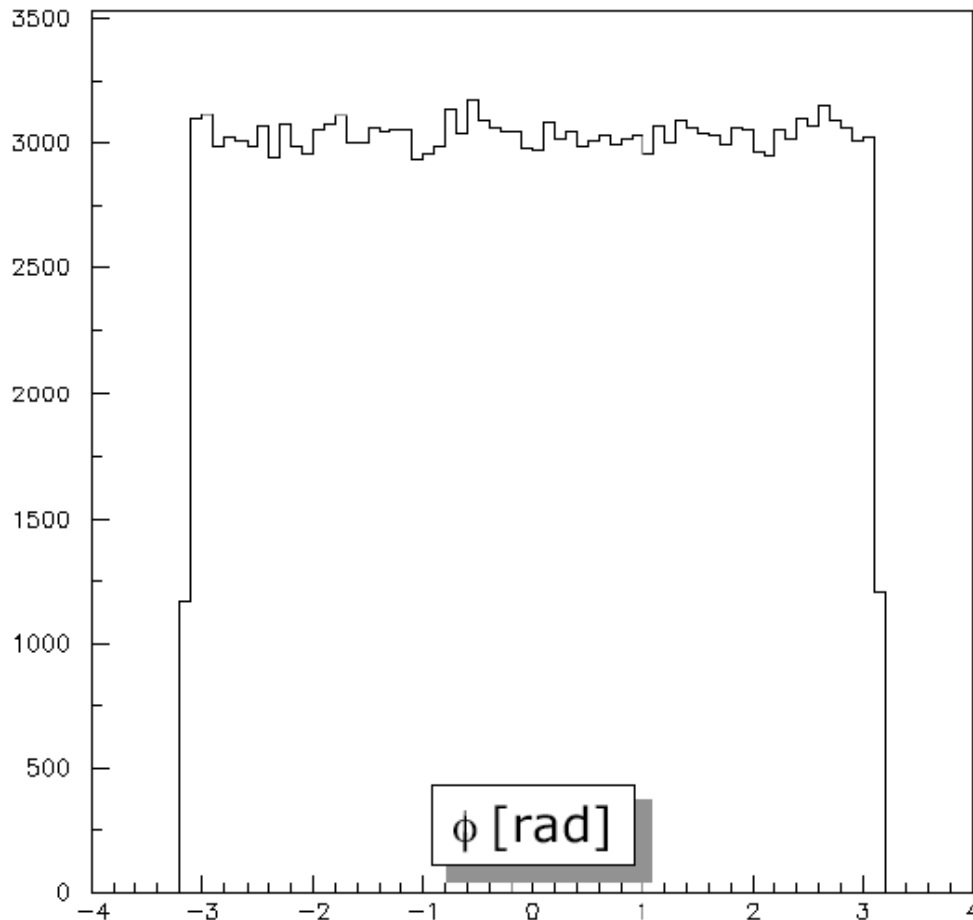


Κατανομές Poisson

- Το πλήθος των ραδιενεργών διασπάσεων σε ορισμένο χρόνο t , **μικρό** σε σχέση με τον μέσο χρόνο ζωής (χρόνος διάσπασης)
- Το πλήθος συγκεκριμένου τύπου σωματιδίων σε σκέδαση σωματιδίου-σωματιδίου όταν ο **συνολικός αριθμός των γεγονότων είναι πολύ μεγάλος** και η συγκεκριμένη διαδικασία **σπάνια**
- Η πιθανότητα παρατήρησης n γεγονότων σε χρόνο t , όταν ο μέσος ρυθμός είναι μ : **$\lambda = \mu t$** . Η μέση τιμή **λ -αναμενόμενη τιμή-** και η διακύμανση (σ^2): **variance** στην κατανομή Poisson είναι **ισες!**
- Απο δώ προκύπτει **ο τύπος : $n \pm \sqrt{n}$** που χρησιμοποιείται στα στατιστικά σφάλματα όταν μετρούμε σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα

Ομοιόμορφες Κατανομές (Uniform Distributions)

- Η πιθανότητα είναι σταθερή σε ένα διάστημα : πχ η κατανομή των μιονίων κατα την αζιμουθιακή γωνία ϕ στη σκέδαση : $ee \rightarrow \mu\mu$



$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

E : αναμενόμενη τιμή

V : variance

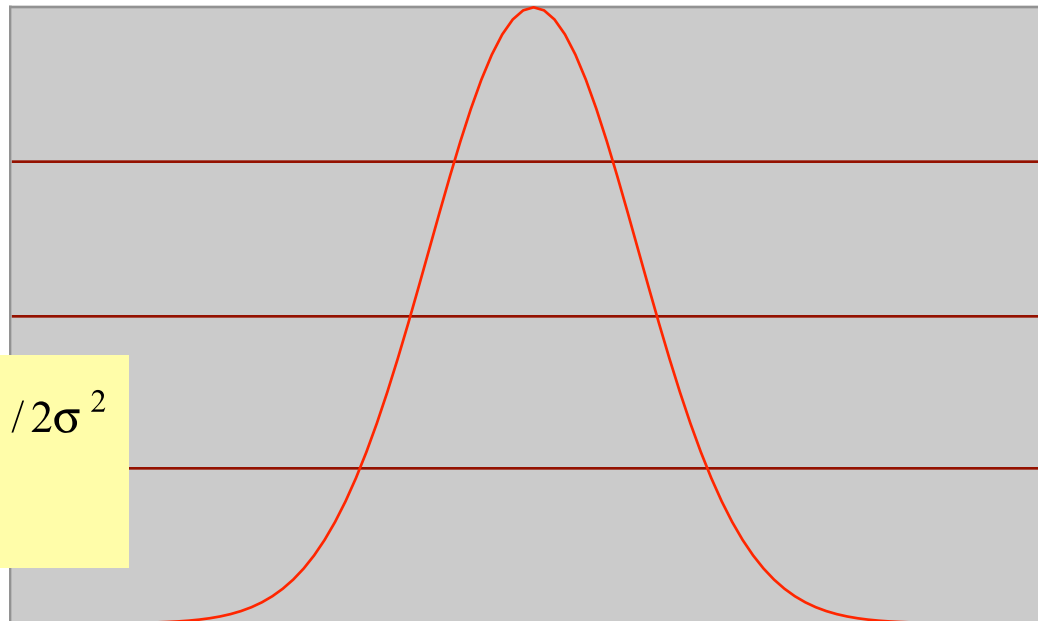
$$E[x] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$V[x] = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$$

Κατανομή Gauss ή Normal

Πυκνότητα πιθανότητας

$$P(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}$$



Mean

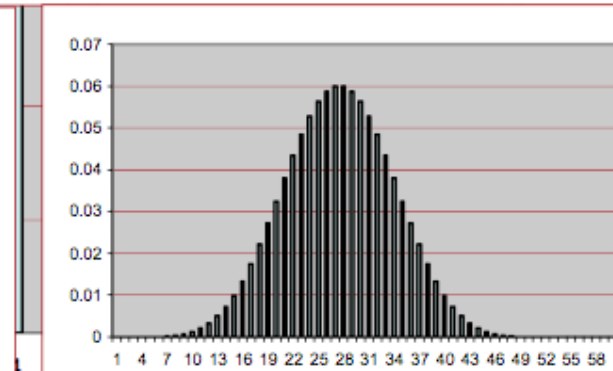
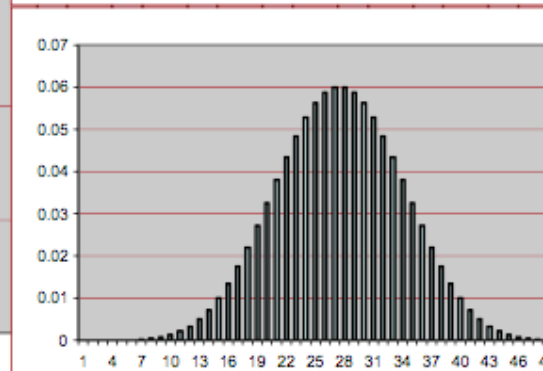
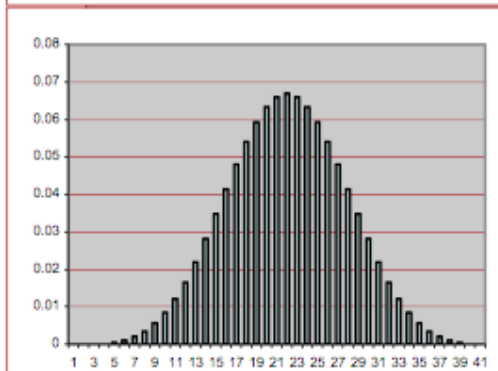
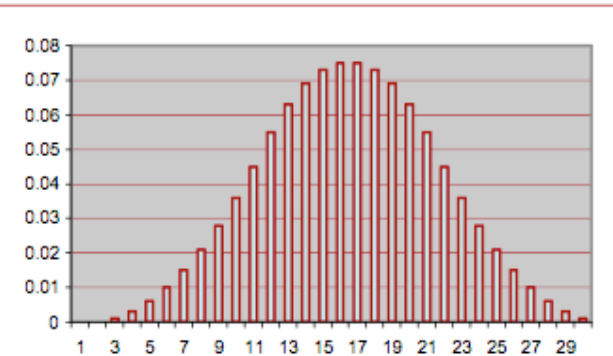
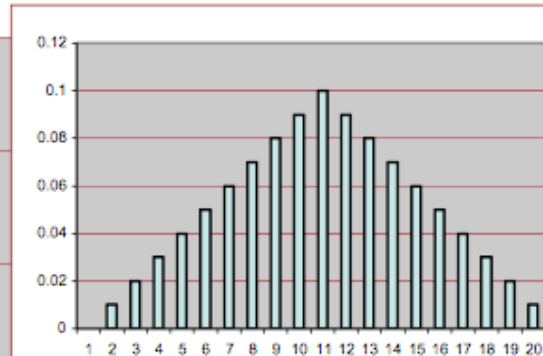
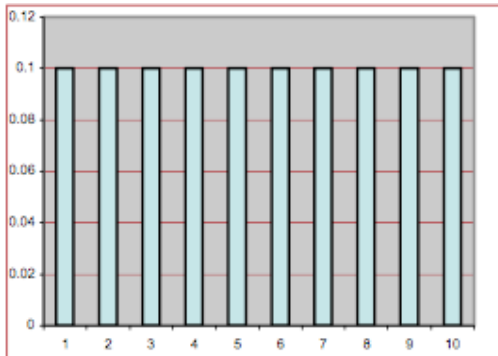
$$\begin{aligned} \mu &= \langle x \rangle = \int x P(x) dx \\ &= \mu \end{aligned}$$

Variance

$$\begin{aligned} V \equiv \sigma^2 &= \langle (x - \mu)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \\ &\quad \langle x \rangle^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

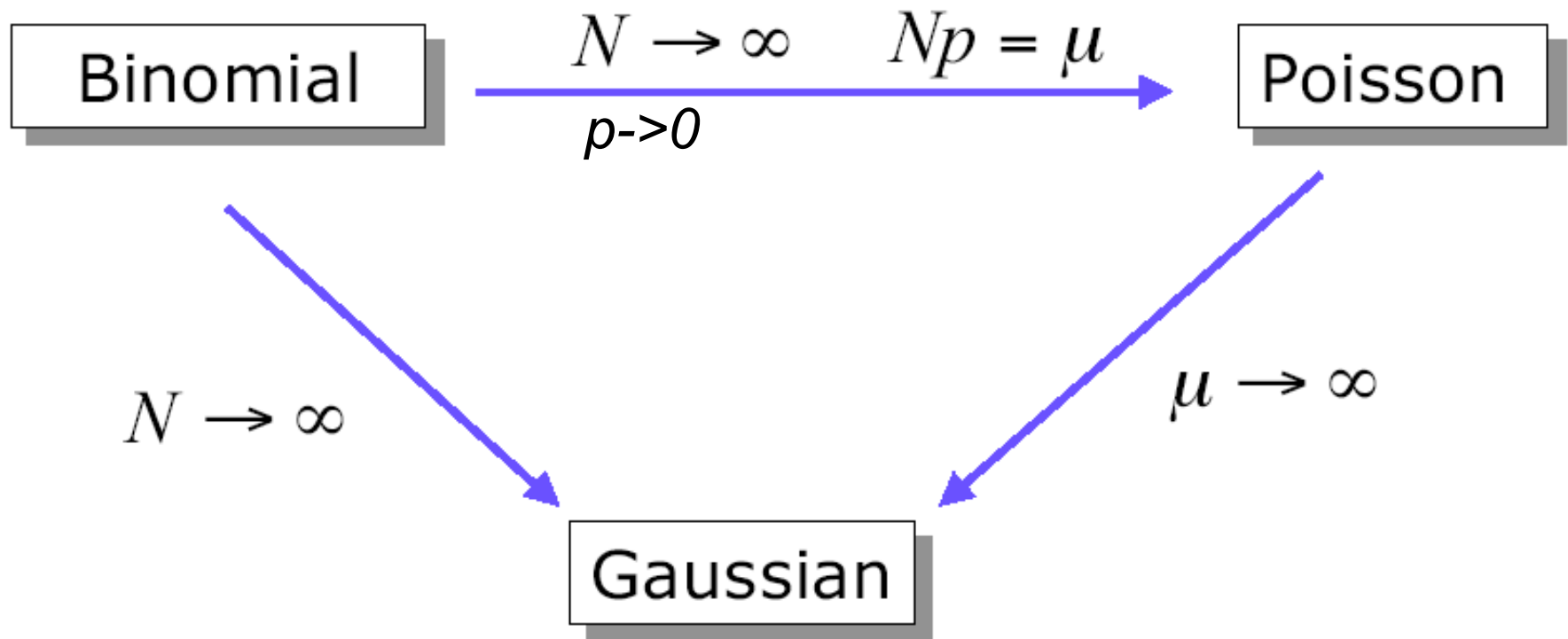
Central Limit Theorem (CLT)

- Το άθροισμα y , n τυχαίων, ανεξάρτητων μεταβλητών x_i είναι gaussian ($n \rightarrow \infty$) με μ το άθροισμα των μ_i και σ^2 το άθροισμα των σ_i^2 (όποια κι αν είναι η κατανομή των x_i)
- Η κατανομή από τις μέσες τιμές τυχαίων κατανομών είναι στο όριό της gauss
- π.χ. : Convolute uniform distribution με τον εαυτό της



Σχέσεις μεταξύ κατανομών

Διωνυμη : N =το πλήθος των δοκιμών, p =η πιθανότητα επιτυχίας
σε κάθε δοκιμή



Τύποι κατανομών Gauss

Μια **μόνο** κατανομή υπάρχει!

68.27% within 1σ

95.45% within 2σ

99.73% within 3σ

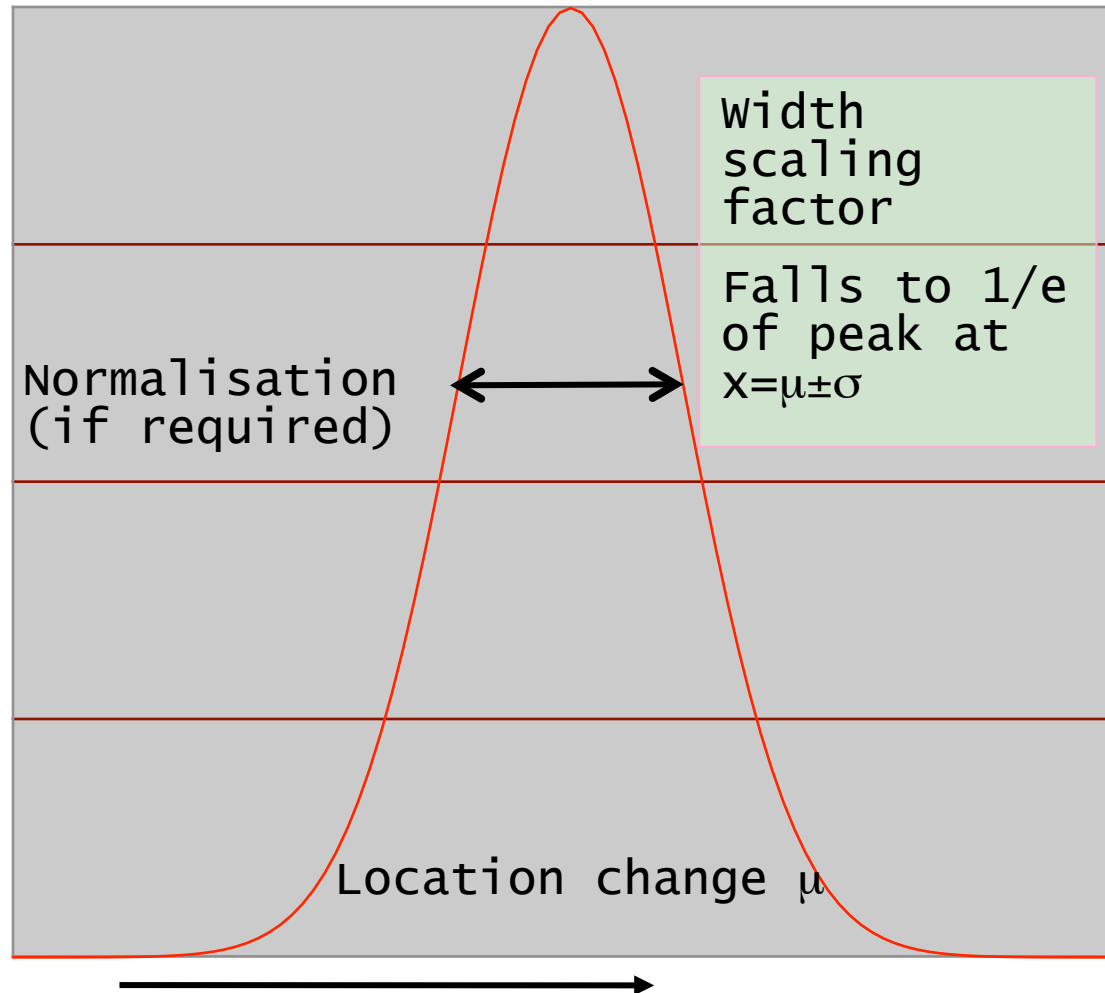


90% within 1.645σ

95% within 1.960σ

99% within 2.576σ

99.9% within 3.290σ



Κατανομή Chi-Squared (χ^2)

$$z = \chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

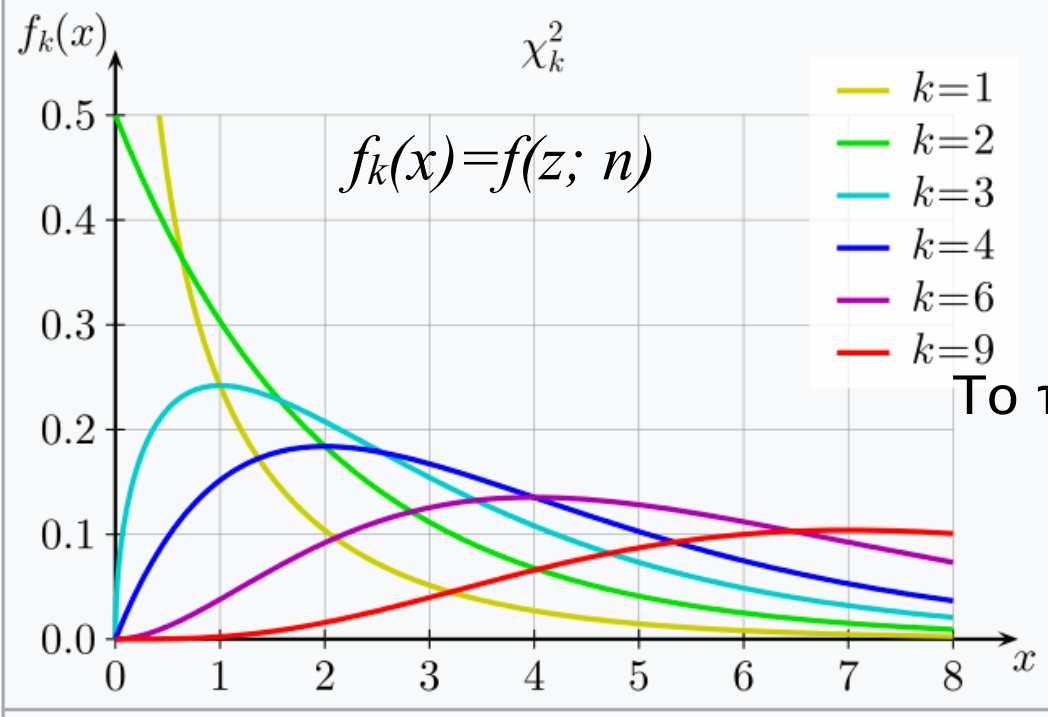
x_i : ανεξαρτητες μεταβλητές με κατανομή Gauss (x_i : standard normal variables)

$$f(z; n) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2} ; n = 1, 2, \dots$$

$$E[z] = n$$

$$V[z] = 2n$$

Probability density function



Το πλήθος των βαθμών ελευθερίας

$$\Gamma(x) = e^{-Cx} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{x/n}}{1 + x/n}$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

Χρησιμοποιείται ευρέως σε hypothesis testing, confidence intervals (special case of the Γ (gamma) distribution)

Generating Distributions

Given `int rand()` in `stdlib.h`

```
float Random()
```

```
{return ((float)rand())/RAND_MAX;}
```

```
float uniform(float lo, float hi)
```

```
{return lo+Random()*(hi-lo);}
```

```
float life(float tau)
```

```
{return -tau*log(Random());}
```

```
float ugauss()          // really crude. Do not use
```

```
{float x=0; for(int i=0;i<12;i++)
```

```
x+=Random(); return x-6;}
```

```
float gauss(float mu, float sigma)
```

```
{return mu+sigma*ugauss();}
```

A better Gaussian Generator

```
float ugauss(){  
    static bool igot=false;  
    static float got;  
    if(igot){igot=false; return got;}  
    float phi=uniform(0.0F,2*M_PI);  
    float r=life(1.0f);  
    igot=true;  
    got=r*cos(phi);  
    return r*sin(phi);}
```