

Υπολογιστική Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

4ο Εξάμηνο 2020-2021

Στατιστική
Πιθανότητες-Κατανομές

Διδάσκοντες : Χαρά Πετρίδου
Δήμος Σαμψωνίδης

Γιατί κάνουμε στατιστική ?

- Θέλουμε να προσδιορίσουμε ένα μέγεθος (**parameter estimation**) π.χ. το πλάτος Γ_h ή την μάζα του Higgs: $124.98 \pm 0.28 (\pm 0.19 \pm 0.21) \text{ GeV}$
- Ελέγχουμε το κατά πόσο τα δεδομένα μας βρίσκονται σε συμφωνία με την θεωρία (**goodness of fit**)
- Ελέγχουμε αν τα δεδομένα έχουν 'προτίμηση' προς την θεωρία 1 ή την θεωρία 2 (**hypothesis testing**)
- Σχεδιάζουμε το επόμενο πείραμα (**decision making**)
-
-

Γιατί κάνουμε στατιστική ?

- Θέλουμε να προσδιορίσουμε ένα μέγεθος (**parameter estimation**) π.χ. το πλάτος Γ_n ή την μάζα του Higgs: 124.98 ± 0.28 ($\pm 0.19 \pm 0.21$) GeV
- Ελέγχουμε το κατά πόσο τα δεδομένα μας βρίσκονται σε συμφωνία με την θεωρία (**goodness of fit**)
- Ελέγχουμε αν τα δεδομένα έχουν 'προτίμηση' προς την θεωρία 1 ή την θεωρία 2 (**hypothesis testing**)
- Σχεδιάζουμε το επόμενο πείραμα (**decision making**)
-
-

Βασική διάκριση: Περιγραφική και Επαγωγική Στατιστική

Descriptive (Περιγραφική) Statistics

- ασχολείται με τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίαση των δεδομένων
- χρησιμοποιεί αριθμητικούς δείκτες όπως η μέση τιμή, η διάμεσος, η διακύμανση κλπ. (μέτρα θέσης και διασποράς)
- όταν χρησιμοποιείται για την περιγραφή ενός δείγματος, τα μέτρα αφορούν μόνο αυτό και όχι άλλα δείγματα ή ολόκληρο τον πληθυσμό

Βασική διάκριση: Περιγραφική και Επαγωγική Στατιστική

Descriptive (Περιγραφική) Statistics

- ασχολείται με τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίαση των δεδομένων
- χρησιμοποιεί αριθμητικούς δείκτες όπως η μέση τιμή, η διάμεσος, η διακύμανση κλπ. (μέτρα θέσης και διασποράς)
- όταν χρησιμοποιείται για την περιγραφή ενός δείγματος, τα μέτρα αφορούν μόνο αυτό και όχι άλλα δείγματα ή ολόκληρο τον πληθυσμό

Inferential (Επαγωγική) Statistics

- στοχεύει στην εξαγωγή συμπερασμάτων και την πραγματοποίηση προβλέψεων για τον πληθυσμό, μελετώντας ένα τυχαίο δείγμα του
- πραγματοποιούνται εκτιμήσεις για τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού (εκτιμητική) και έλεγχοι στατιστικών υποθέσεων για την ορθότητα μιας υπόθεσης σχετικά με τον πληθυσμό

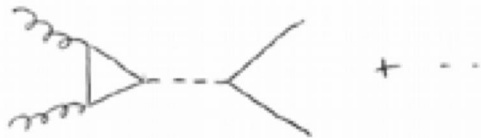
Βασική διάκριση: Περιγραφική και Επαγωγική Στατιστική

Ο ρόλος της Στατιστικής στα Πειράματα Φυσικής Υψηλών Ενεργειών

Theory ↔ Statistics ↔ Experiment

Theory (model, hypothesis):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\psi} \not{D} \psi + \dots$$

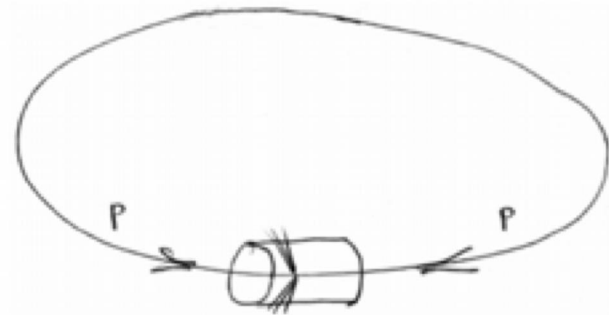


$$\sigma = \frac{G_F \alpha_s^2 m_H^2}{288 \sqrt{2} \pi} \times \dots$$

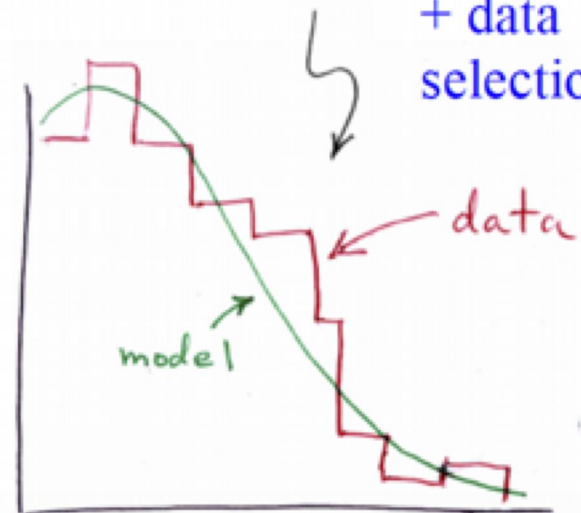
+ simulation
of detector
and cuts



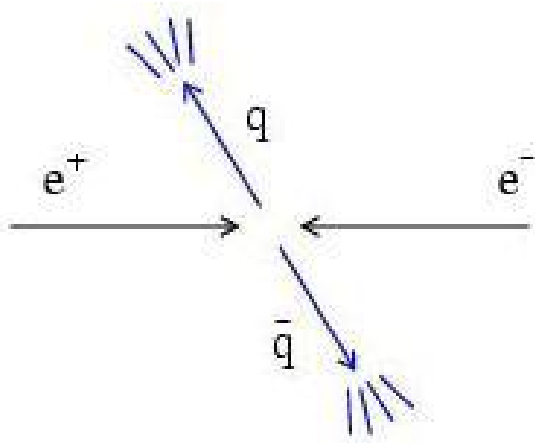
Experiment:



+ data
selection



Data Analysis in Particle Physics



Observe events of a certain type

- Measure characteristics of each event (particle momenta, number of muons, energy of jets,...)
- Theories (e.g. SM) predict distributions of these properties up to free parameters, e.g., α , G_F , M_Z , α_s , m_H , ...
- Some tasks of data analysis:
 - ✓ Estimate (measure) the parameters;
 - ✓ Quantify the uncertainty of the parameter estimates;
 - ✓ Test the extent to which the predictions of a theory are in agreement with the data.

Data Analysis in Particle Physics

Observe events (e.g., pp collisions) and for each, measure a set of characteristics:

particle momenta, number of muons, energy of jets,...

Compare observed distributions of these characteristics to predictions of theory. From this, we want to:

Estimate the free parameters of the theory: $m_H = 125.4$

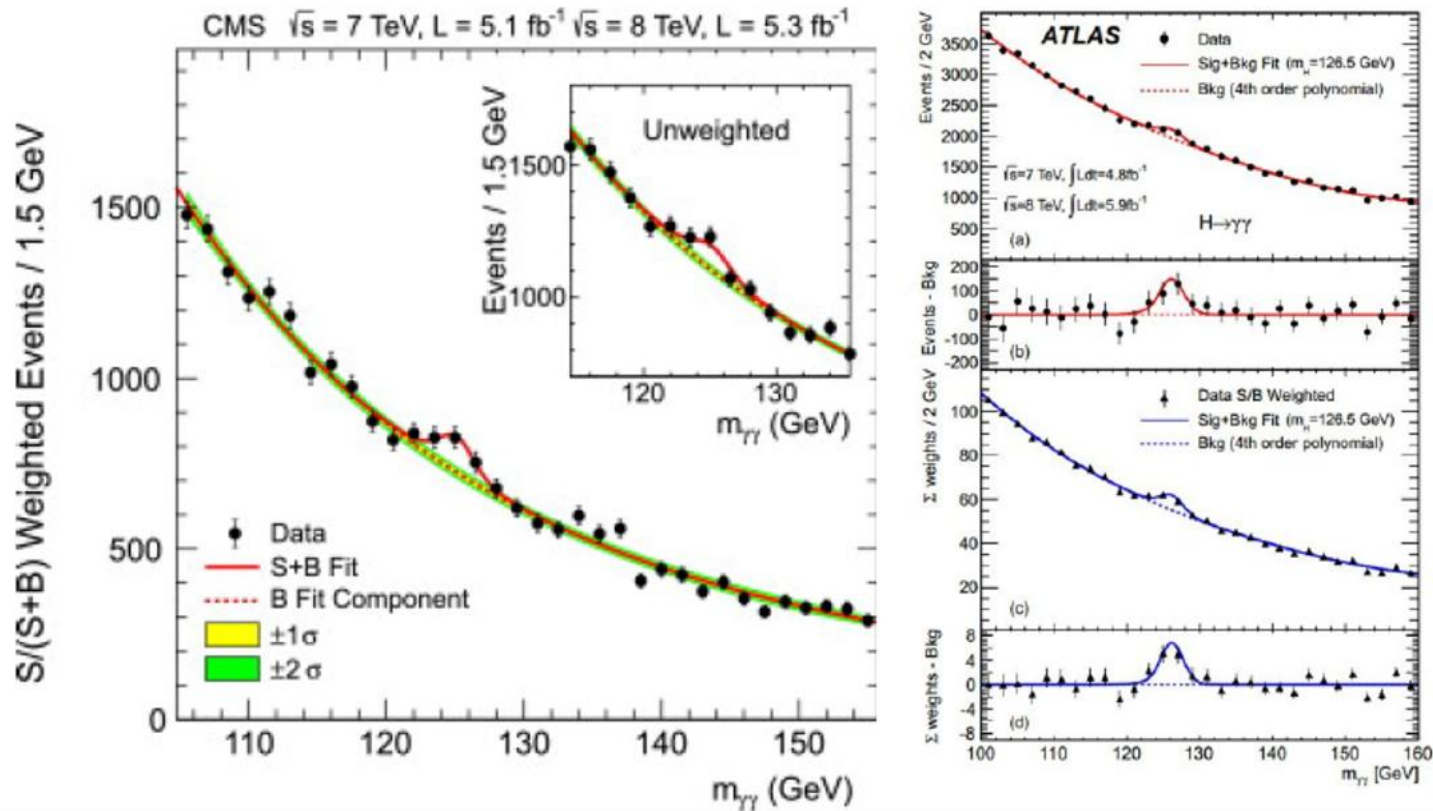
Quantify the uncertainty in the estimates: $\pm 0.4 \text{ GeV}$

Assess how well a given theory stands in agreement with the observed data:

0^+ good, 2^+ bad

To do this we need a clear definition of **PROBABILITY**

Η ανακάλυψη του Higgs: απόρροια σύνθετης υπολογιστικής διαδικασίας!

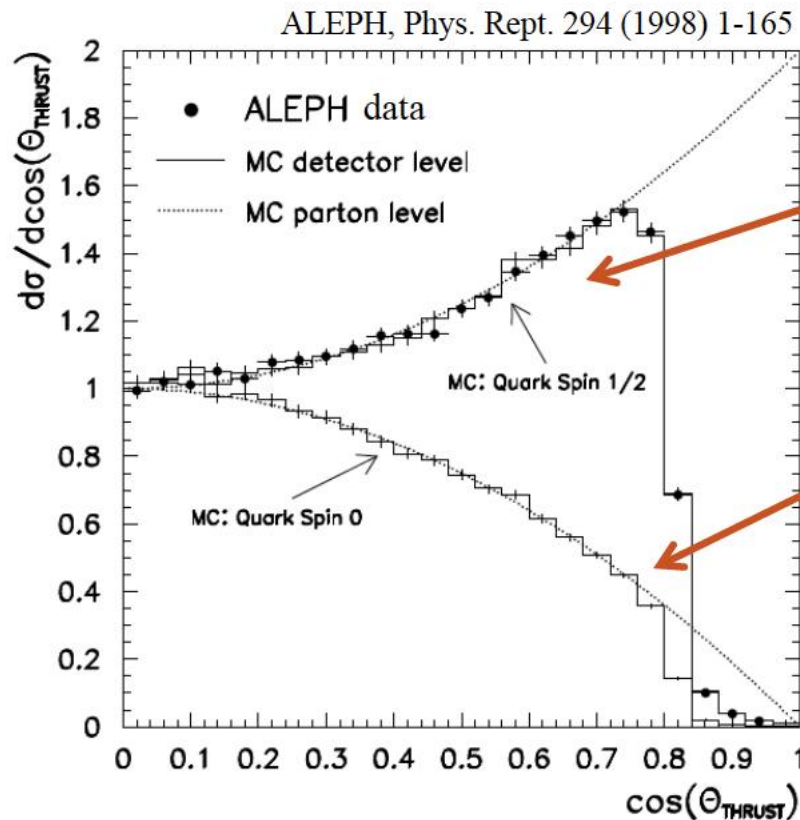


The dots and the error bars represent the observed number of events in a given mass bin. The numbers come from a long chain of data analysis beginning with the trigger event selection, followed by the event reconstruction, the event filtering and analysis for the millions of events recorded by the experiments

The data simulation and analysis is performed on a distributed data grid system called the WLCG (Worldwide LHC Computing Grid). This infrastructure based on tiers computing centres has been installed all around the world to absorb the heavy computing load of the high LHC statistics. The tier 0 is located at the data production centre (CERN) and absorbs 20% of the load, 11 tier-1 connected through direct high bandwidth fibre links (10 Gb/s) are scattered across the main participating countries/regions and ~ 140 tier-2 are providing the specific computing support necessary to research teams. The WLCG provides more than 250,000 processors, and close to 150 PB of disk storage from over 150 sites in 34 countries, producing a massive distributed computing infrastructure that support the needs of more than 8,000 physicists.

Data Analysis in Particle Physics: testing hypotheses

Test the extent to which a given model agrees with the data:

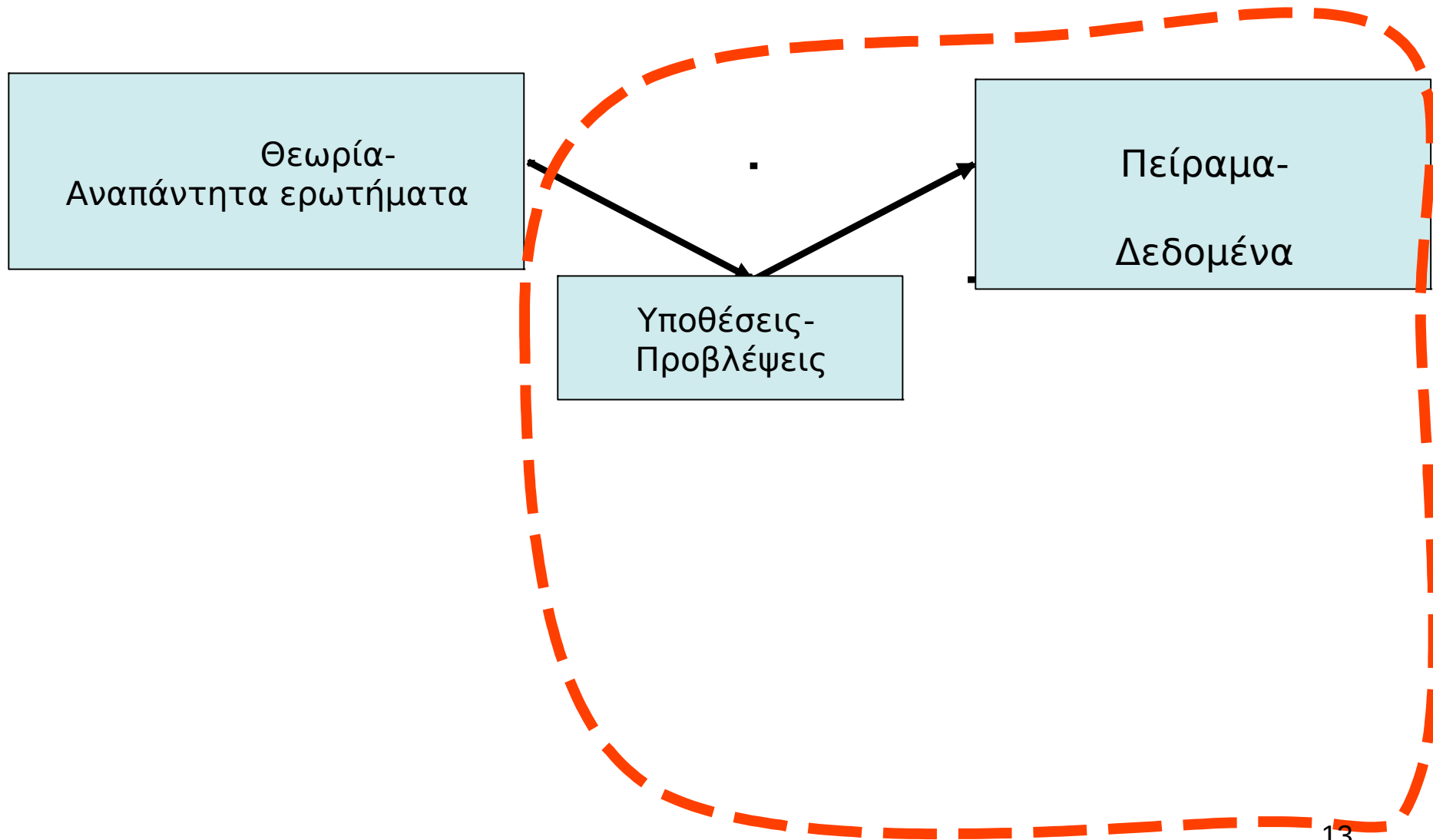


spin-1/2 quark
model “good”

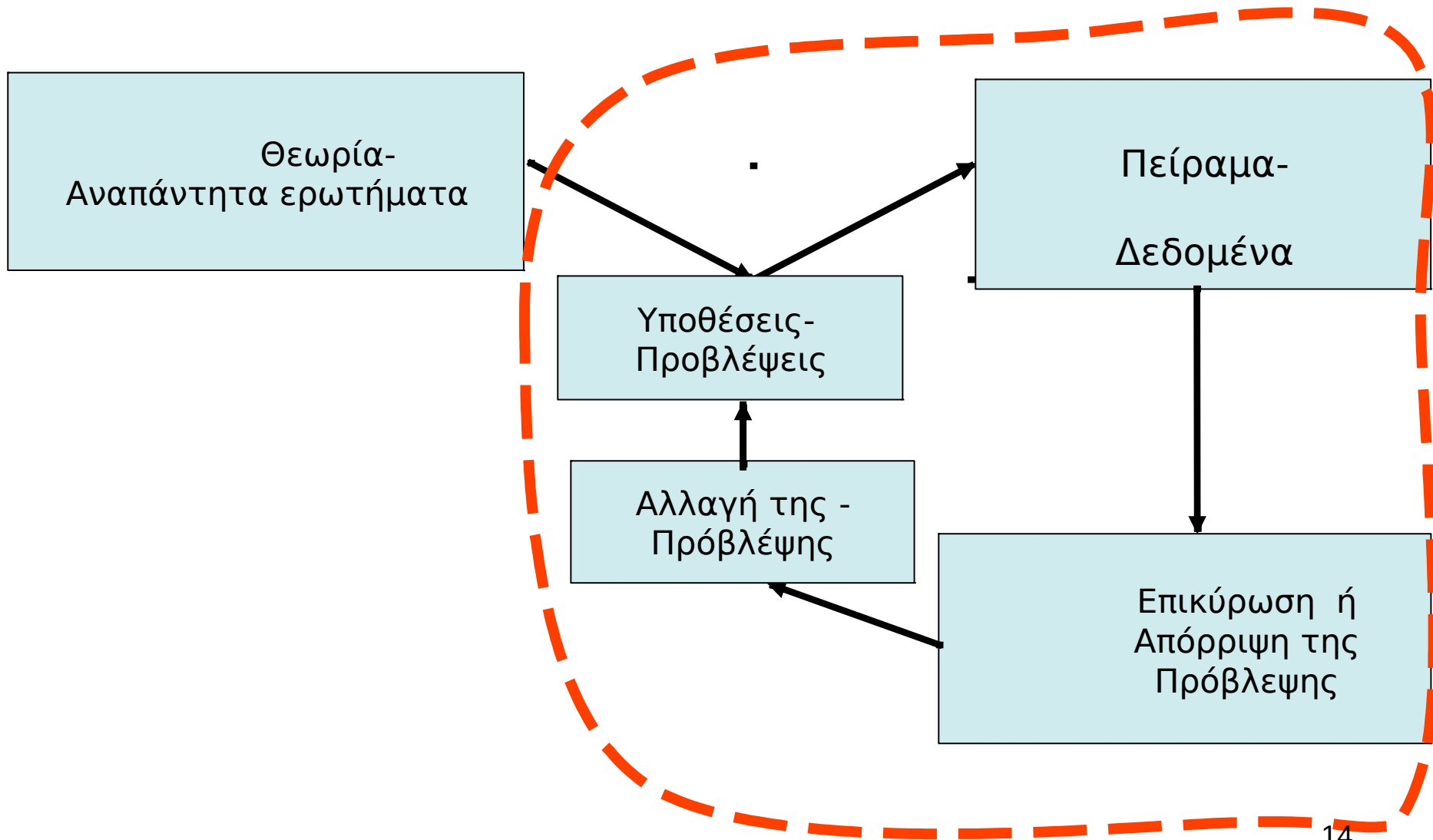
spin-0 quark
model “bad”

In general need tests
with well-defined properties
and quantitative results.

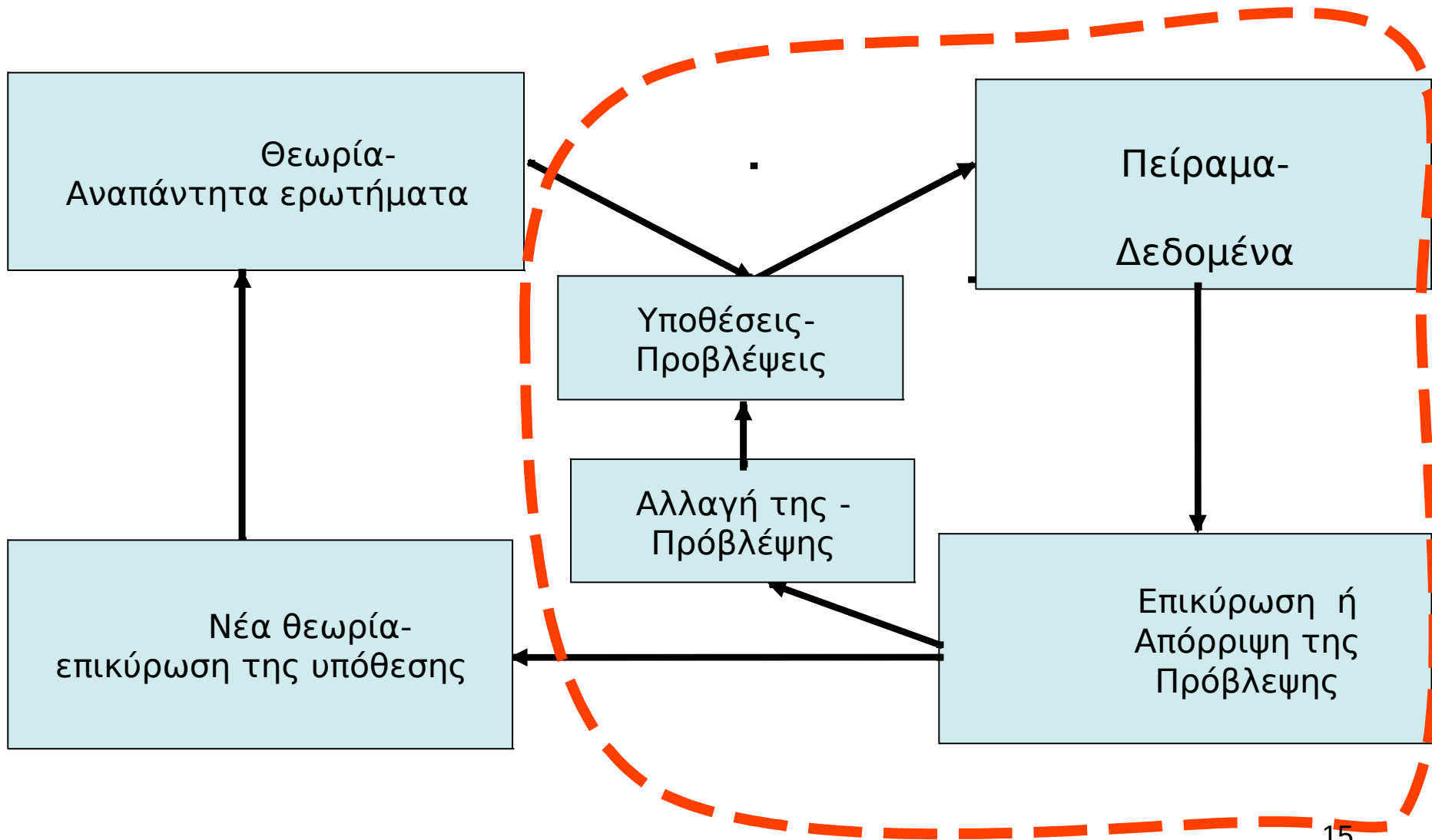
Μεθοδολογία στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων I



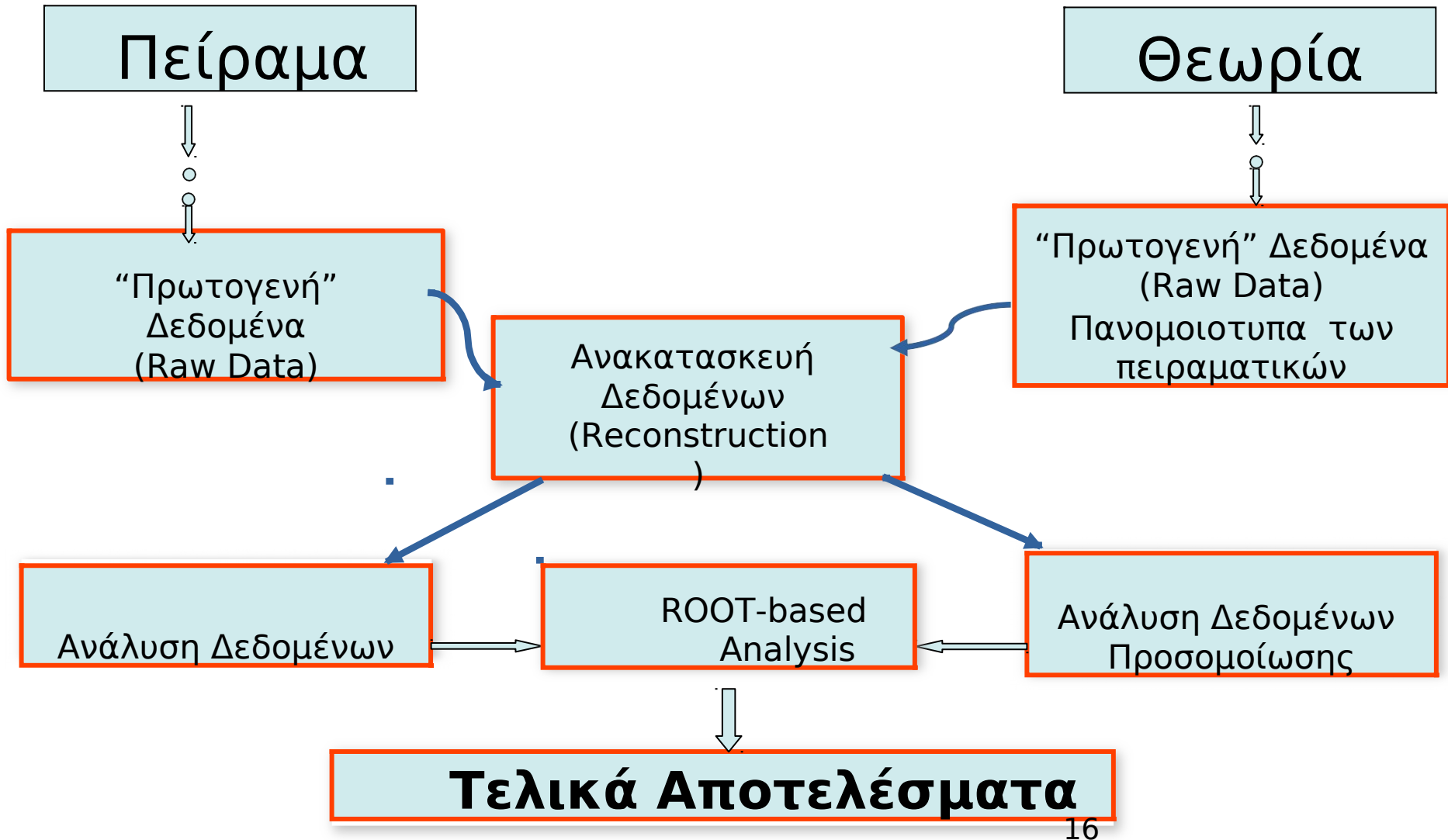
Μεθοδολογία στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων I



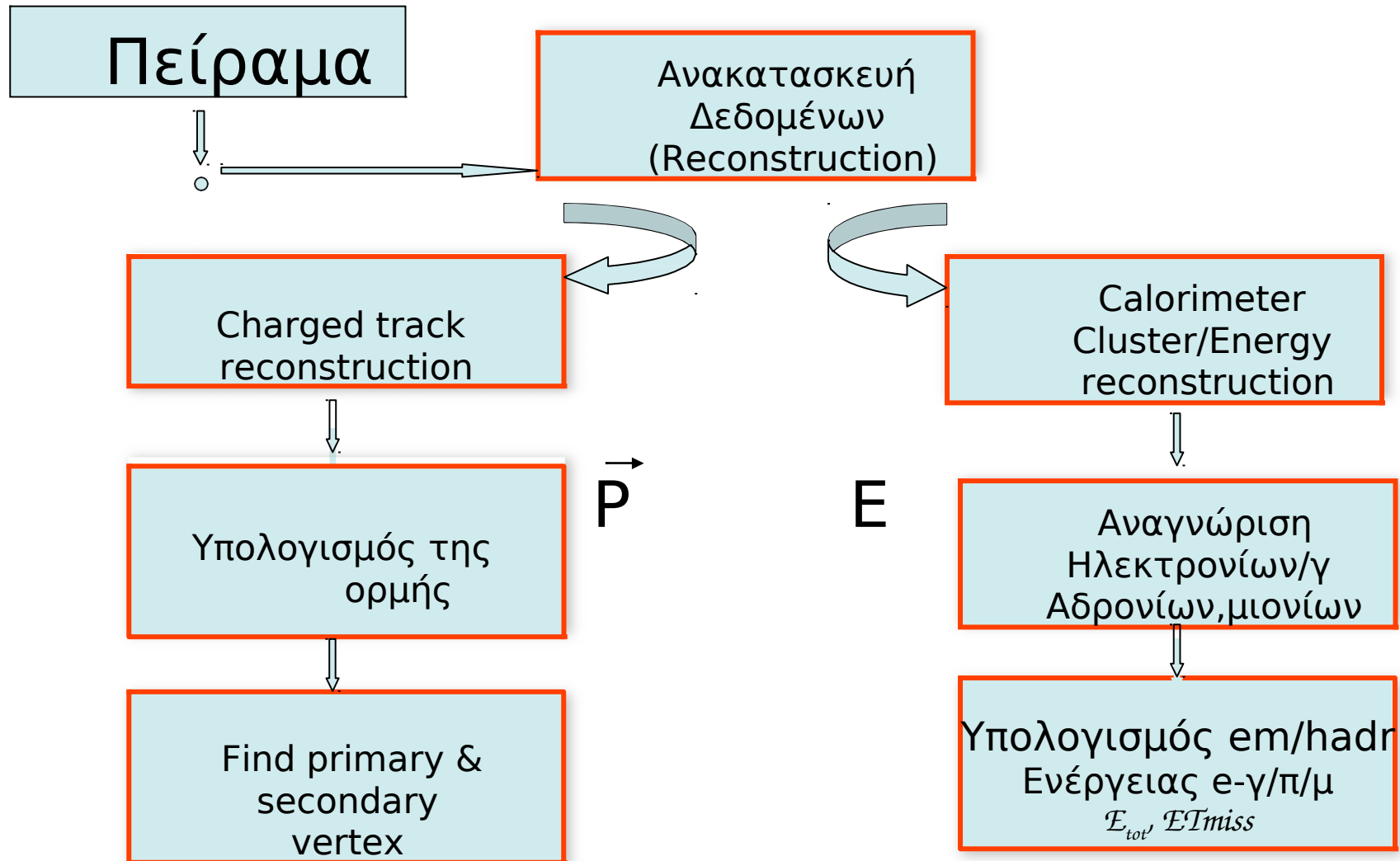
Μεθοδολογία στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων I



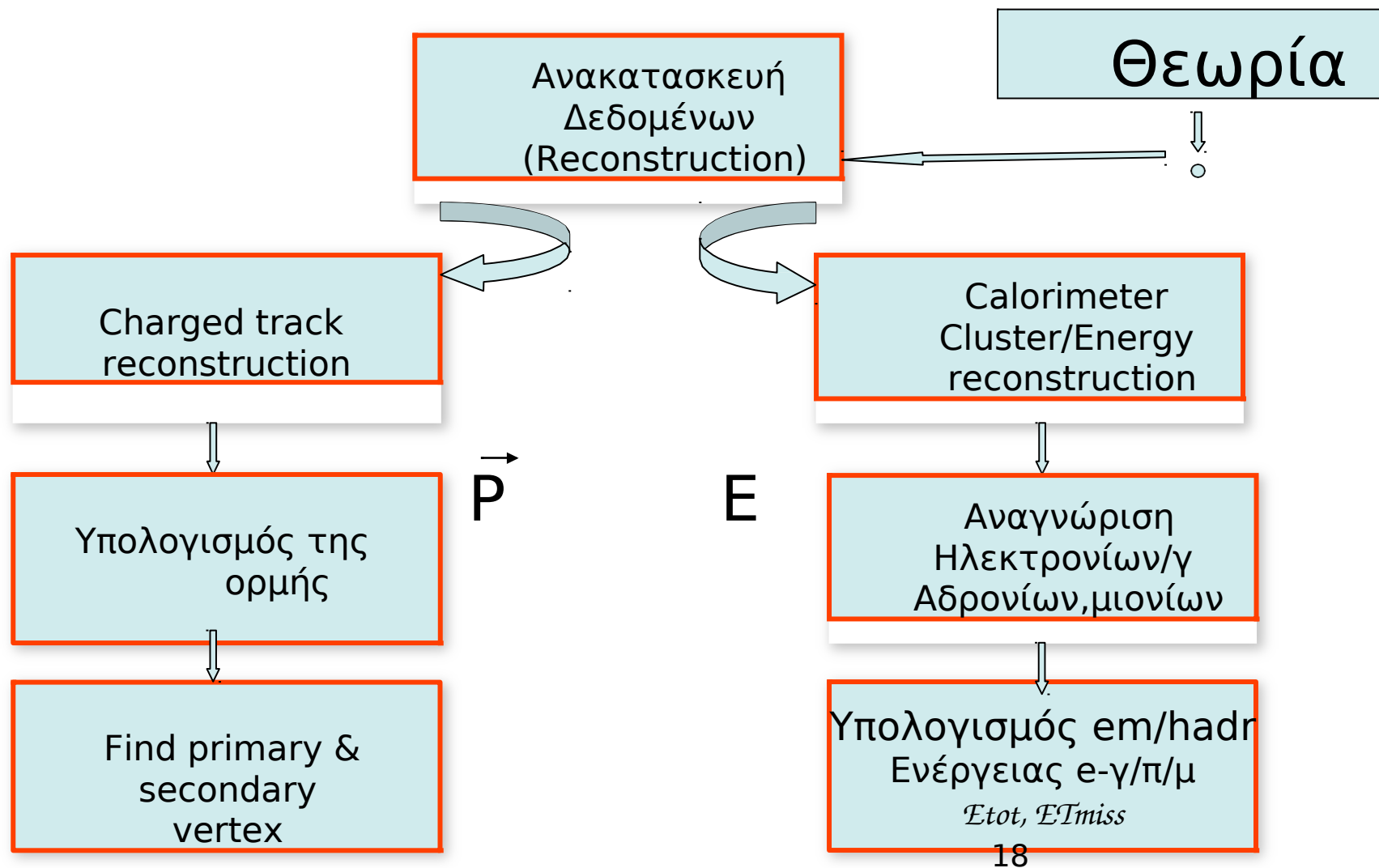
Μεθοδολογία στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων II



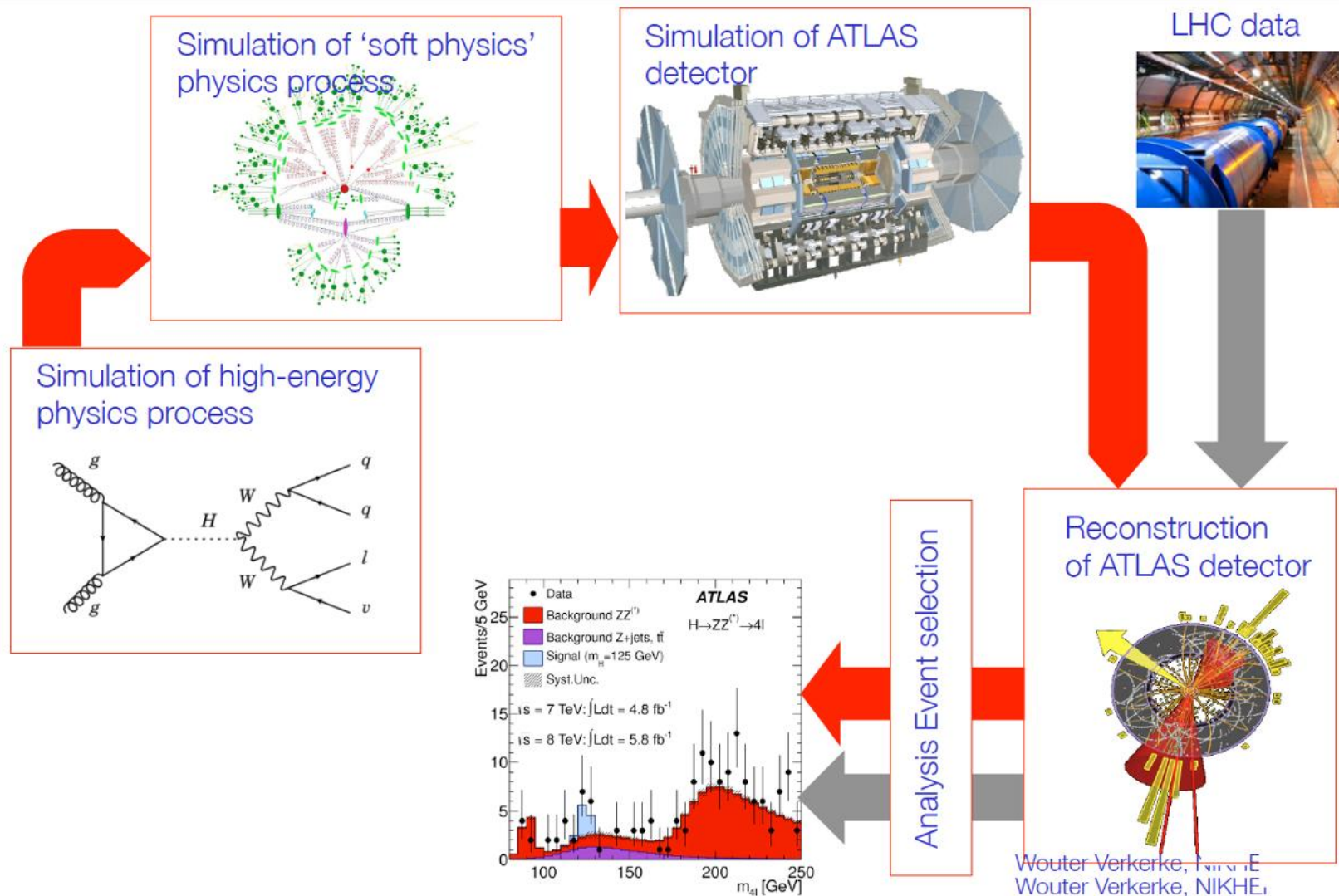
Μεθοδολογία στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων III



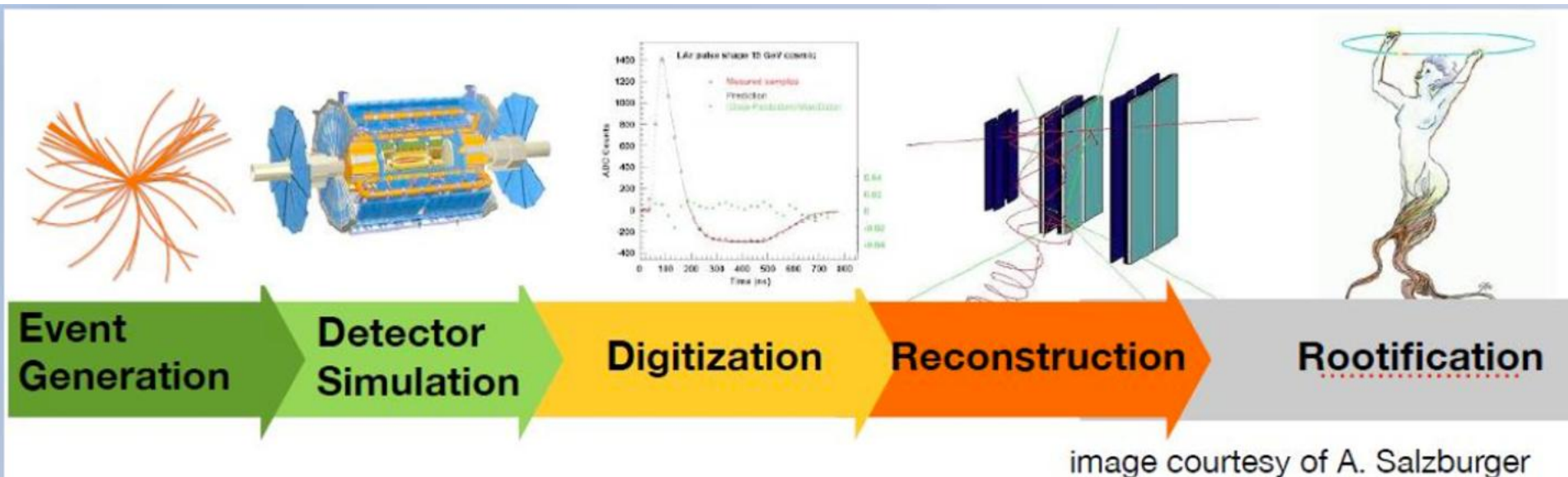
Μεθοδολογία στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων III



The simulation workflow and origin of uncertainties

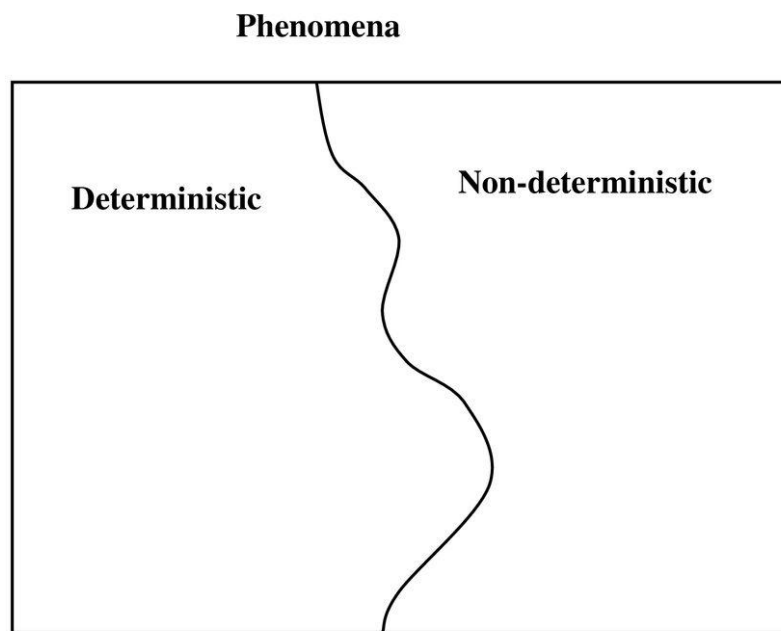


Στάδια της προσομοίωσης μιας αλληλεπίδρασης



Εισαγωγή στην Θεωρία των Πιθανοτήτων

Διαχωρισμός Φαινομένων



Deterministic – Αιτιοκρατικά

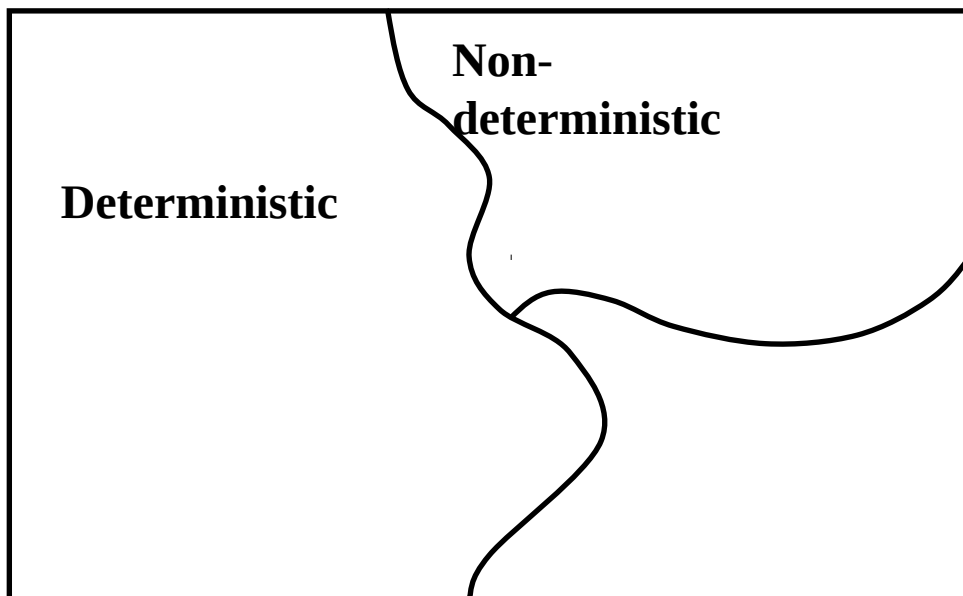
- Όταν υπάρχει ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει/προβλέπει ‘απόλυτα’ το αποτέλεσμα ενός φαινομένου. Η επανάληψη ενός πειράματος (υπό ταυτόσημες συνθήκες) θα φέρει το ίδιο αποτέλεσμα.
- Παραδείγματα από τον χώρο των φυσικών επιστημών.

Non – Deterministic – Στοχαστικά

- Δεν υπάρχει μαθηματικό μοντέλο που να προβλέπει ‘απόλυτα’ το αποτέλεσμα του φαινομένου. Ακόμη και με ίδιες συνθήκες τα αποτελέσματα διαφέρουν.

Στοχαστικά Φαινόμενα I

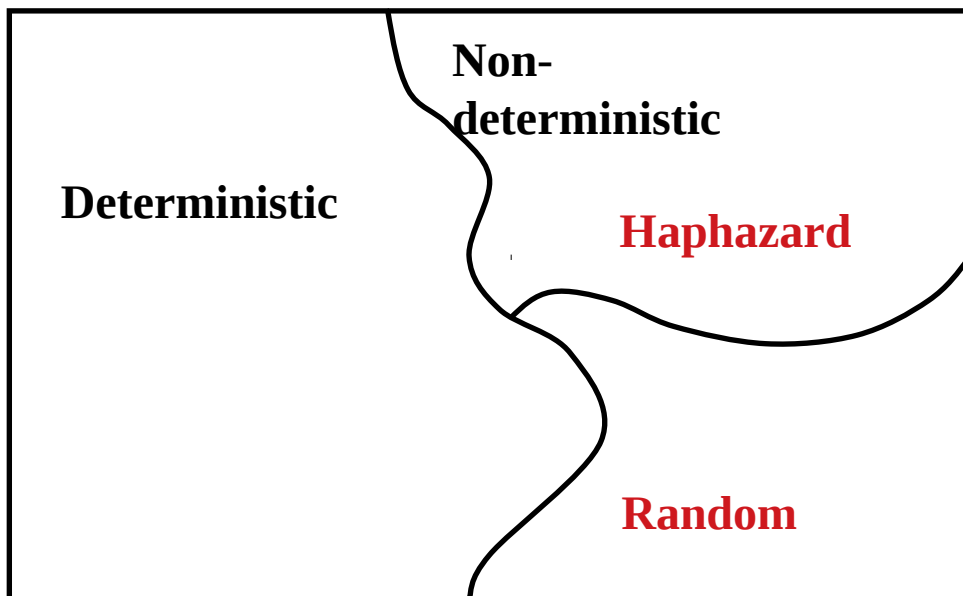
Phenomena



- Επαναλήψεις ενός πειράματος και η παρατήρηση των αποτελεσμάτων αποκαλύπτουν μια **‘τυχειότητα’** ή **‘αβεβαιότητα’** στην έκβαση του φαινομένου.
- Ανεξάρτητα από την πληροφορία που κατέχουμε δεν είμαστε σε θέση να καθορίσουμε την εξέλιξη του φαινομένου.

Στοχαστικά Φαινόμενα II

Phenomena



- Υποκατηγορίες Στοχαστικών Φαινομένων

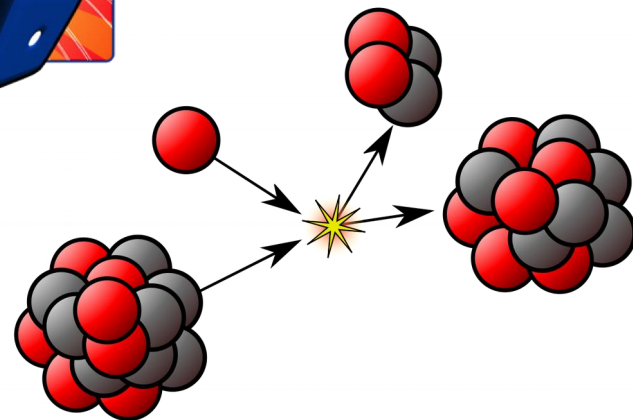
1. Τυχαία (Random): Υφίσταται η αδυναμία πρόβλεψης του αποτελέσματος, αλλά σε βάθος χρόνου παρατηρείται ένα 'μοτίβο', μια στατιστική κανονικότητα.

2. 'Ασυνάρτητα' (Haphazard): Ομοίως μη προβλέψιμα αποτελέσματα και δίχως κάποια στατιστική συμπεριφορά σε βάθος χρόνου.

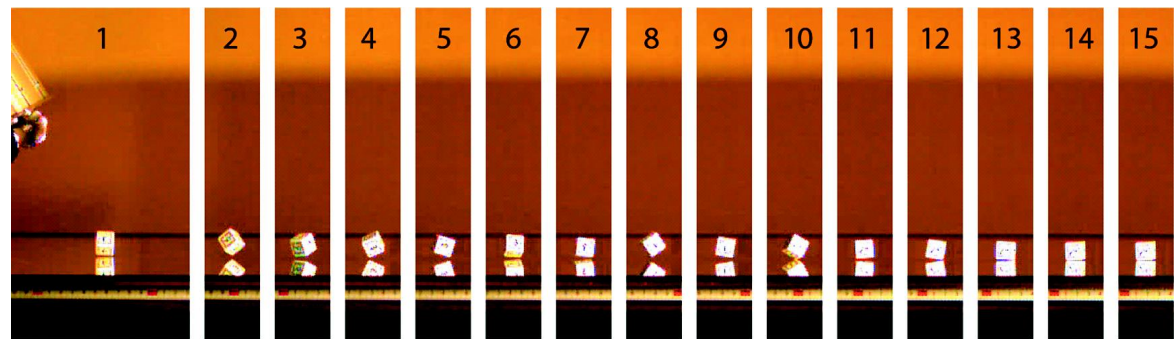
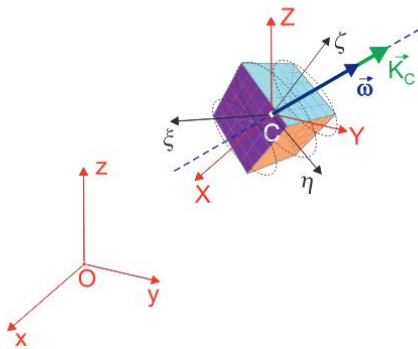
Στοχαστικά Φαινόμενα: Παραδείγματα

- Ρίψη νομίσματος και παρατήρηση της αλληλουχίας των στοιχειωδών αποτελεσμάτων.
- Ρίψη k ζαριών και παρατήρηση των αποτελεσμάτων.
- Καταγραφή του πλήθους σωματιδίων ραδιενεργού πηγής εντός συγκεκριμένων χρονικών διαστημάτων.
- Καταγραφή απόστασης από το κέντρο του στόχου μετά από ρίψεις βέλους (darts).

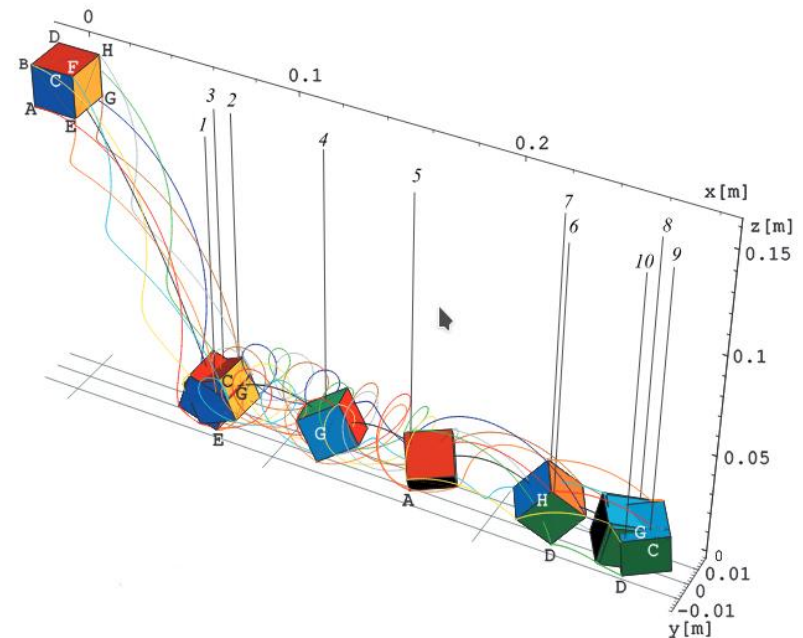
Οι επαναλήψεις οδηγούν στην δυνατότητα πρόβλεψης π.χ. 50% εμφάνιση 'γράμματα', για αμερόληπτο πείραμα (?)



Στοχαστικά Φαινόμενα: Can the dice be fair by dynamics?

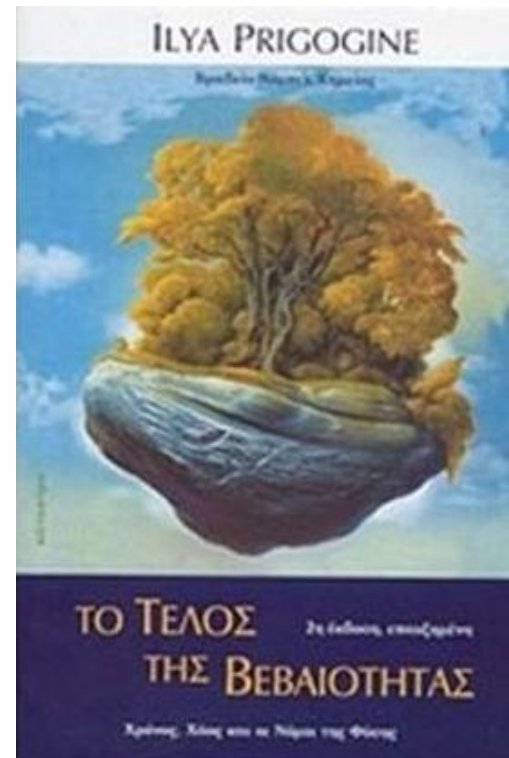
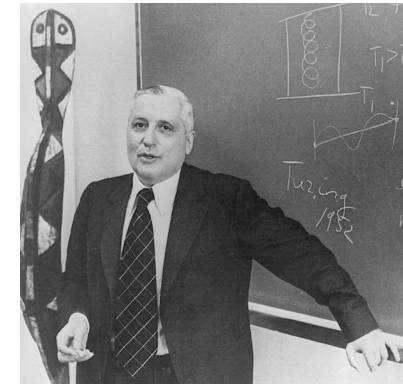
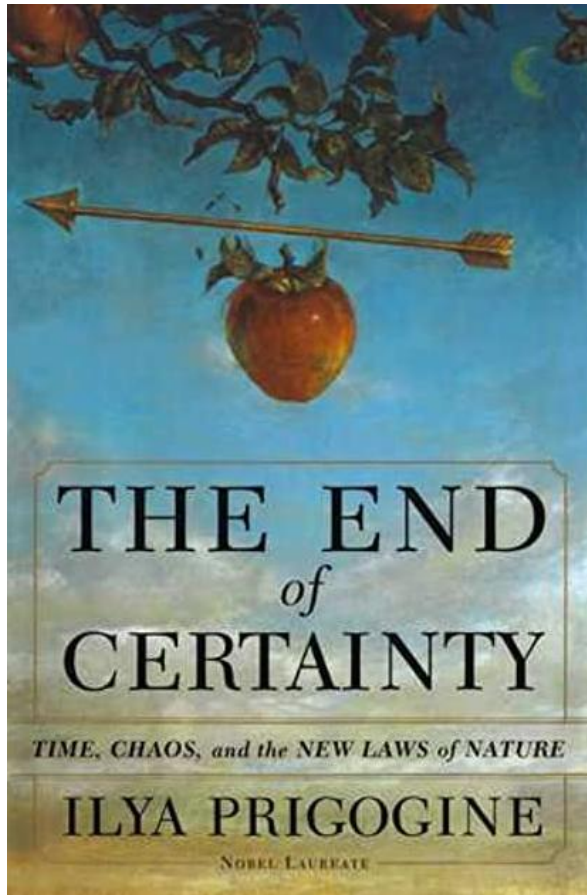


“It is shown that for the realistic values of the initial energy the probabilities of the die landing on the face which is the lowest one at the beginning is larger than the probabilities of landing on any other face.”



J. STRZALKO et al. Journal of Bifurcation and Chaos 2010.

Πρόταση ανάγνωσης: Το Τέλος της Βεβαιότητας – I. Prigogine





Ορισμοί: Πείραμα Τύχης

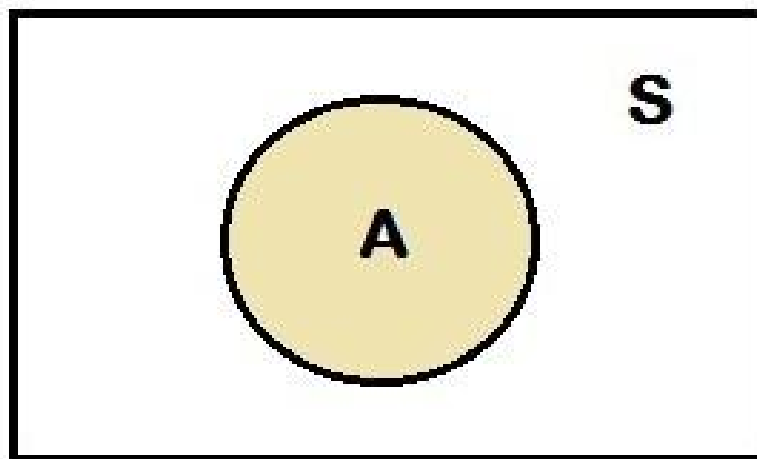
Με το όρο **Πείραμα Τύχης (Random Experiment)** εννοούμε την διεξαγωγή και παρατήρηση ενός στοχαστικού φαινομένου για το οποίο ισχύουν:

- Είναι δυνατές πολλαπλές επαναλήψεις με ταυτόσημες συνθήκες.
- Δεν είναι δυνατή η ακριβής πρόβλεψη τους αποτελέσματος μιας συγκεκριμένης επανάληψης.
- Είναι γνωστό το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων.

Ορισμοί: Δειγματικός Χώρος και Ενδεχόμενο

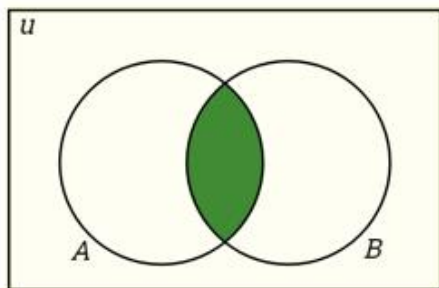
Δειγματικός Χώρος (Sample Space) ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης, συμβολίζεται με Ω (or S or U). Τα στοιχεία του Ω , ονομάζονται **στοιχειώδη ενδεχόμενα** (or **sample points**).

Υποσύνολα του Ω ονομάζονται **ενδεχόμενα ή γεγονότα**.

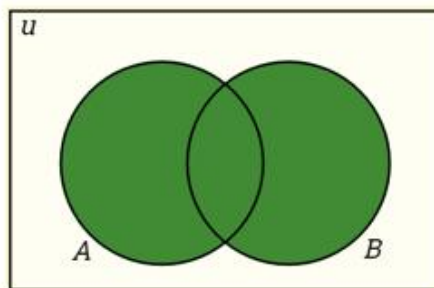


Διάγραμμα
Venn

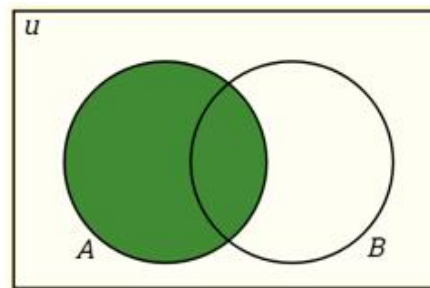
Βασικές πράξεις και ιδιότητες ενδεχομένων



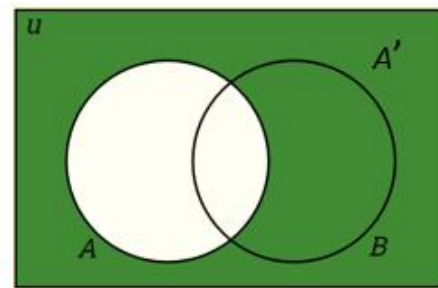
$A \cap B$



$A \cup B$



A



A^c (όχι A)

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	αντιμεταθετική ιδιότητα
$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap \Gamma$	$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$	προσεταιριστική ιδιότητα
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$	
$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$	$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$	επιμεριστική ιδιότητα
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	τύποι De Morgan

Ορισμοί: Πιθανότητα

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας (**Kolmogorov 1933**): Η πιθανότητα θεμελιώνεται μέσω ιδιοτήτων – αξιωμάτων. Η P με τιμές πραγματικούς αριθμούς λέγεται πιθανότητα όταν ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα

$$P(A) \geq 0 \quad \forall A \subset \Omega$$

$$P(\Omega) = 1$$



$$if \quad (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Το τελευταίο αξίωμα στη γενική του

$$P\left(\bigcup_i^{\infty} A_i\right) = \sum_i^{\infty} P(A_i)$$



Ορισμοί: Πιθανότητα

‘The degree of randomness can be quantified with the concept of probability’

Ορισμοί: Πιθανότητα

'The degree of randomness can be quantified with the concept of probability'

Κλασικός ορισμός πιθανότητας (κατά **Laplace**): Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ένας **πεπερασμένος** δειγματικός χώρος, με ω_i **ισοπίθανα** στοιχειώδη ενδεχόμενα. Αν $N(A)$ το πλήθος των στοιχείων ενδεχομένου A , τότε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Ορισμοί: Πιθανότητα

'The degree of randomness can be quantified with the concept of probability'

Κλασικός ορισμός πιθανότητας (κατά **Laplace**): Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ένας **πεπερασμένος** δειγματικός χώρος, με ω_i **ισοπίθανα** στοιχειώδη ενδεχόμενα. Αν $N(A)$ το πλήθος των στοιχείων ενδεχομένου A , τότε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Στατιστικός ορισμός πιθανότητας (κατά **Von Mises**): Η πιθανότητα $P(A)$ ενδεχομένου A , είναι η οριακή σχετική συχνότητα εμφάνισης του A . Αν πραγματοποιήσουμε n φορές ένα πείραμα, με $f_n(A)$ το πλήθος εμφανίσεων του A στις n επαναληψεις, τότε:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(A)}{N}$$

Πιθανότητες - Συχνότητα

- Ορισμός **-Frequentist** ('συχνάζουσα' πιθανότητα)

Η πιθανότητα $P(A)$ είναι το όριο του λόγου $N(A)/N$ (σε ένα σύνολο N αντικειμένων εκ των οποίων κάποια έχουν την ιδιότητα A)

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A)}{N}$$

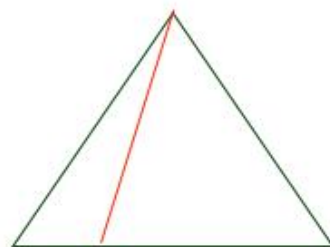
Ο ορισμός της συχνάζουσας πιθανότητας προϋποθέτει ότι μία μέτρηση/πείραμα μπορεί να επαναληφθεί πολλές φορές !

Η έννοια του "ορίου" φαίνεται σα να απαιτούνται άπειρα πειράματα- που δεν ισχύει

Προβλήματα με τον κλασσικό ορισμό

1. Πότε πρόκειται για εξίσου πιθανές περιπτώσεις? Αν ρίξουμε δύο νομίσματα έχουμε 3 ή 4 ίσες δυνατότητες?
2. Τι κάνουμε σε περιπτώσεις που έχουμε συνεχείς μεταβλητές? Πως να χωρίσουμε ένα τρίγωνο σε δύο τυχαία μέρη? (έχουμε ∞ στον αριθμητη και τον παρονομαστη)

Έχουμε λύση:
Το αποφασίζουμε
εκ των προτέρων



Δεν Έχουμε λύση

Απαιτείται να ορίσουμε διαφορετικά τον δειγματικό χώρο ώστε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα να χωρίσουμε το τρίγωνο σε δύο ανισα μέρη

Πρόβλημα-περιορισμοί με τον ορισμό της 'συχνάζουσας' πιθανότητας

- Η $P(A)$ εξαρτάται και από το A και από το σύνολο N . Η πιθανότητα που υπολογίζουμε μπορεί να είναι παραπλανητική αν βασιστούμε στην συχνότητα του γεγονότος :
... 10 στους 30 ανθρώπους σε ένα σύνολο είναι 'πλούσιοι' $\Rightarrow P(\text{πλούσιος}) = 1/3 !!!$

Ορισμός της υποκειμενικής πιθανότητας (Bayesian)



Thomas Bayes (1702–1761)

*An essay towards solving a
problem in the doctrine of chances,*
Philos. Trans. R. Soc. **53** (1763) 370.

- $P(A)$ είναι η πιθανότητα που **δίνουμε**
εμείς στην ιδιότητα A να υπάρξει.
- Το A μπορεί να είναι ο,τιδήποτε. Νέα
θεωρία, νέο σωματίδιο, διάσπαση
σωματιδίου, ... βροχή, ... ένα στοίχημα...



Ιδιότητες της υπόκειμενικής πιθανότητας (Bayesian)

Ο Ορισμός αυτός καθορίζει το πόσο ισχυρά “πιστεύει” κανείς ότι X θα συμβεί από το ποσό που είναι διατεθειμένος να στοιχηματίσει: $P(X) = \text{στοίχημα} / \text{συνολικό ποσό (αξία)}$

- $P(A)$ είναι τόσο ιδιότητα του παρατηρητή, όσο και του παρατηρούμενου αντικειμένου.
- Εξαρτάται από το επίπεδο γνώσης του παρατηρητή
- Ο παρατηρητής μπορεί να αλλάξει την πιθανότητα $P(A)$ που δίνει να συμβεί A , αν αλλάξουν τα δεδομένα του !

Ορισμοί: Βασικές Ιδιότητες Πιθανοτήτων

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$\text{for } (A \cap B) = \emptyset \text{ then } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i P(A_i) \quad (\text{Boole's inequality})$$

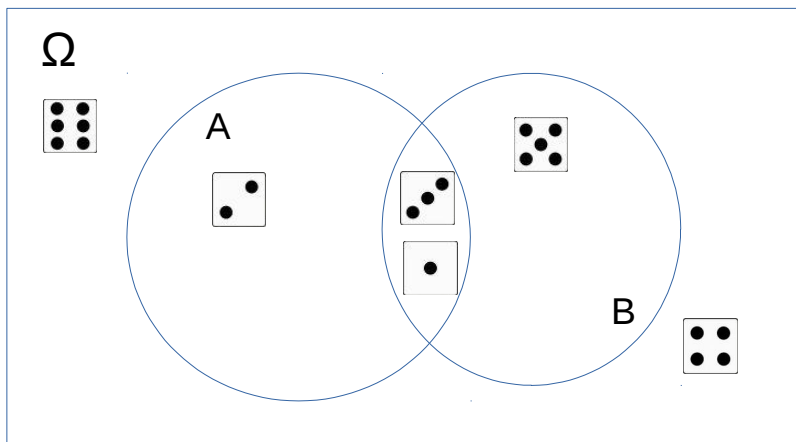
$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 \quad (\text{Bonferroni inequality})$$

Ορισμοί: Υπό Συνθήκη Πιθανότητα (Conditional Probability)

Αναζητούμε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, με δεδομένο ότι έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B (ή ότι πρέπει να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B).

Παράδειγμα: Σε πείραμα ρίψης ζαριού, εξετάζουμε την πιθανότητα να προκύψει αποτέλεσμα μικρότερο του 4, υπό την προϋπόθεση (γνώση) το αποτέλεσμα να είναι περιττός αριθμός.



Το $(A|B)$ ως ενδεχόμενο:

A = 'true' και B = 'true' -> Πραγματοποιείται

A = 'false' και B = 'true' -> Δεν

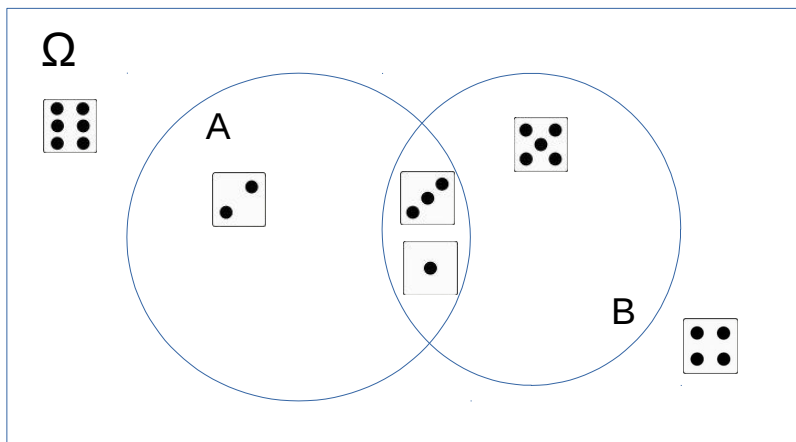
πραγματοποιείται

A = 'false' και B = 'false' -> ???????

Ορισμοί: Υπό Συνθήκη Πιθανότητα (Conditional Probability)

Αναζητούμε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, με δεδομένο ότι έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B (ή ότι πρέπει να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B).

Παράδειγμα: Σε πείραμα ρίψης ζαριού, εξετάζουμε την πιθανότητα να προκύψει αποτέλεσμα μικρότερο του 4, υπό την προϋπόθεση (γνώση) το αποτέλεσμα να είναι περιττός αριθμός.



Το $(A|B)$ ως ενδεχόμενο:

A = 'true' και B = 'true' -> Πραγματοποιείται

A = 'false' και B = 'true' -> Δεν

πραγματοποιείται

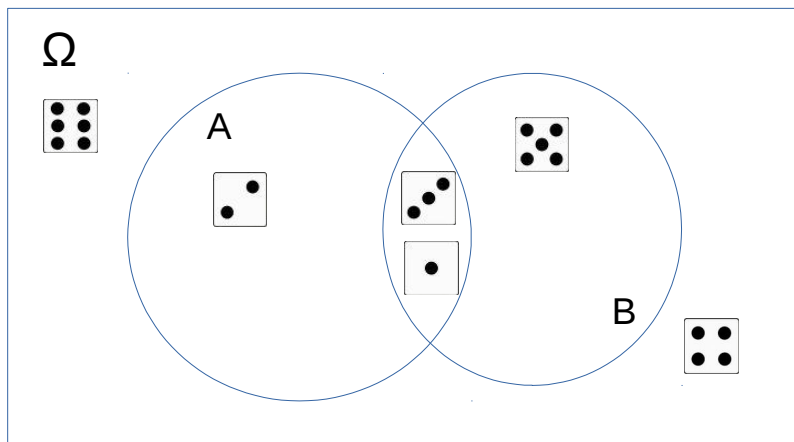
A = 'false' και B = 'false' -> ????????

Με 'στοιχηματικούς' όρους,
κανείς δεν κερδίζει ούτε χάνει!!

Ορισμοί: Υπό Συνθήκη Πιθανότητα (Conditional Probability)

Αναζητούμε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, με δεδομένο ότι έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B (ή ότι πρέπει να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B).

Παράδειγμα: Σε πείραμα ρίψης ζαριού, εξετάζουμε την πιθανότητα να προκύψει αποτέλεσμα μικρότερο του 4, υπό την προϋπόθεση (γνώση) το αποτέλεσμα να είναι περιττός αριθμός.



$$N(\Omega) = 6$$

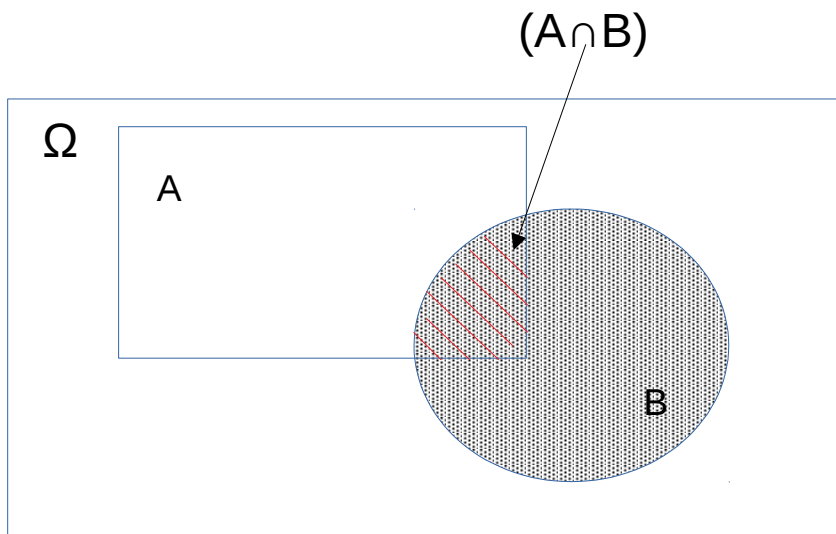
$$N(A) = 3, P(A) = 3/6 = 1/2$$

$$N(B) = 3, P(B) = 3/6 = 1/2$$

$$P(A|B) = ? \text{ 'probability of A given B'}$$

Ορισμοί: Υπό Συνθήκη Πιθανότητα (Conditional Probability)

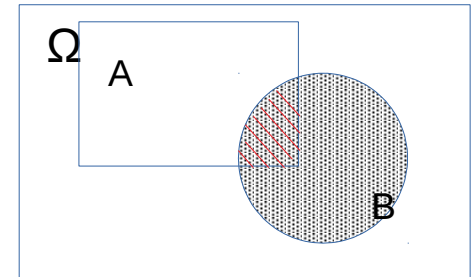
Η αναγκαία συνθήκη να έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B ('given B '), ουσιαστικά περιορίζει τον Δειγματικό Χώρο του πειράματος. Δημιουργεί έναν νέο Δειγματικό Χώρο (Reduced Sample Space). Συνεπώς η 'περιοχή' που εστιάζουμε είναι όλα τα κοινά στοιχεία των συνόλων A και B , **θεωρώντας ως νέο δειγματικό χώρο το σύνολο B .**



Η ζητούμενη δεσμευμένη πιθανότητα, τελικώς εκφράζεται από το **‘τι πιθανότητα έχει το A , να πραγματοποιηθεί εντός του B ?’**

Ορισμοί: Υπό Συνθήκη Πιθανότητα (Conditional Probability)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Δεν απομνημονεύουμε τη σχέση, αλλά κατανοούμε την λογική που εκφράζει παρατηρώντας το διάγραμμα Venn.

Συμπερασματικά: η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας προέκυψε από τις περιπτώσεις όπου μερική γνώση, ως προς την έκβαση ενός πειράματος τύχης, μειώνει την αβεβαιότητα.

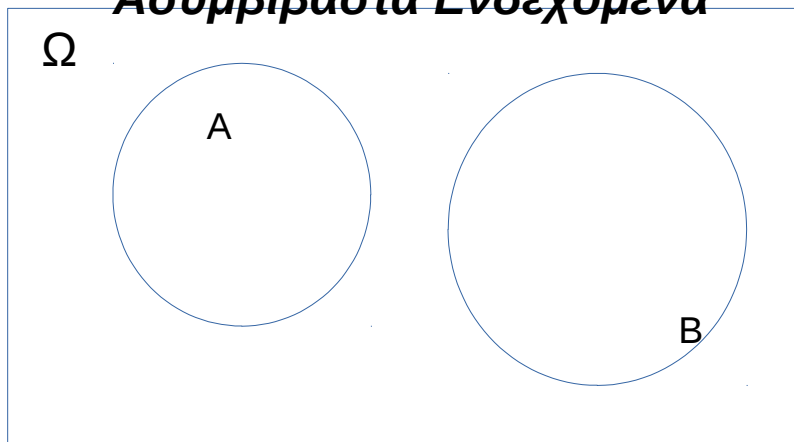
Ορισμοί: Ασυμβίβαστα vs Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

Έννοια: γεγονότα που δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα.

Επίπτωση: η πραγματοποίηση του ενός αυτόματα σημαίνει την ΜΗ πραγματοποίηση του άλλου.

$$\text{Σχέση: } P(A \cap B) = 0$$

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα



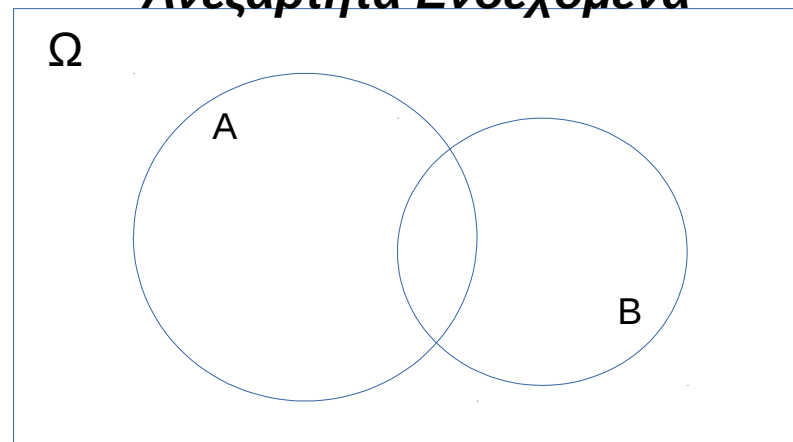
Disjoint Events – no overlap

Έννοια: η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζεται από την πραγματοποίηση του άλλου

Επίπτωση: δεν υπάρχει επίδραση.

$$\text{Σχέση: } P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα



overlapping sets

Ορισμοί: Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα (Independent Events)

Δύο ενδεχόμενα ονομάζονται ανεξάρτητα όταν ισχύει η σχέση:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Παρατηρούμε:

if $P(B) \neq 0$ and $P(A) \neq 0$ then

Ορισμοί: Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα (Independent Events)

Δύο ενδεχόμενα ονομάζονται ανεξάρτητα όταν ισχύει η σχέση:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Παρατηρούμε:

if $P(B) \neq 0$ and $P(A) \neq 0$ then

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Ορισμοί: Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα (Independent Events)

Δύο ενδεχόμενα ονομάζονται ανεξάρτητα όταν ισχύει η σχέση:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Παρατηρούμε:

if $P(B) \neq 0$ and $P(A) \neq 0$ then

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$$

Στην ανεξαρτησία, η δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου δε επηρεάζεται από την πραγματοποίηση του άλλου ενδεχομένου.



Τύπος Bayes

Ορισμοί: Τύπος Bayes

Ισχύει:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(A)P(B|A)$$

Ορισμοί: Τύπος Bayes

Ισχύει:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) \text{ thus}$$

Ορισμοί: Τύπος Bayes

Ισχύει:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) \text{ thus}$$

$$P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \Rightarrow$$

Ορισμοί: Τύπος Bayes

Ισχύει:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

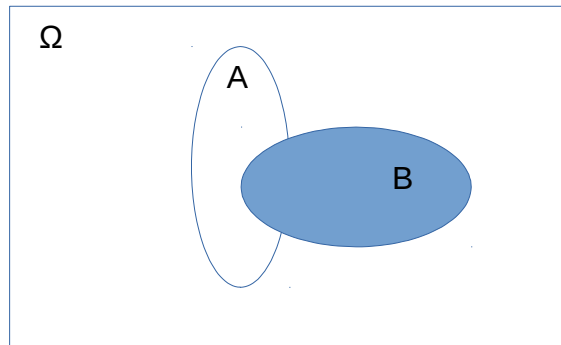
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) \text{ thus}$$

$$P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \Rightarrow$$

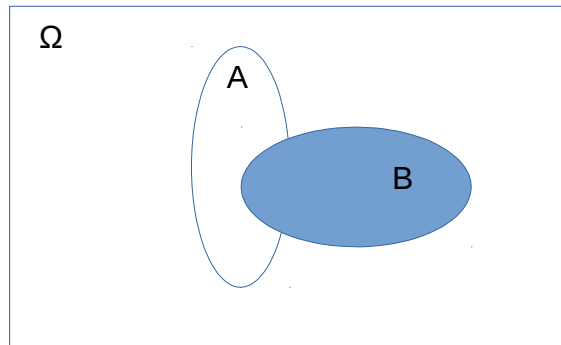
$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A) \quad (\text{Bayes' theorem})$$

Απόδειξη τύπου Bayes (γραφικά)



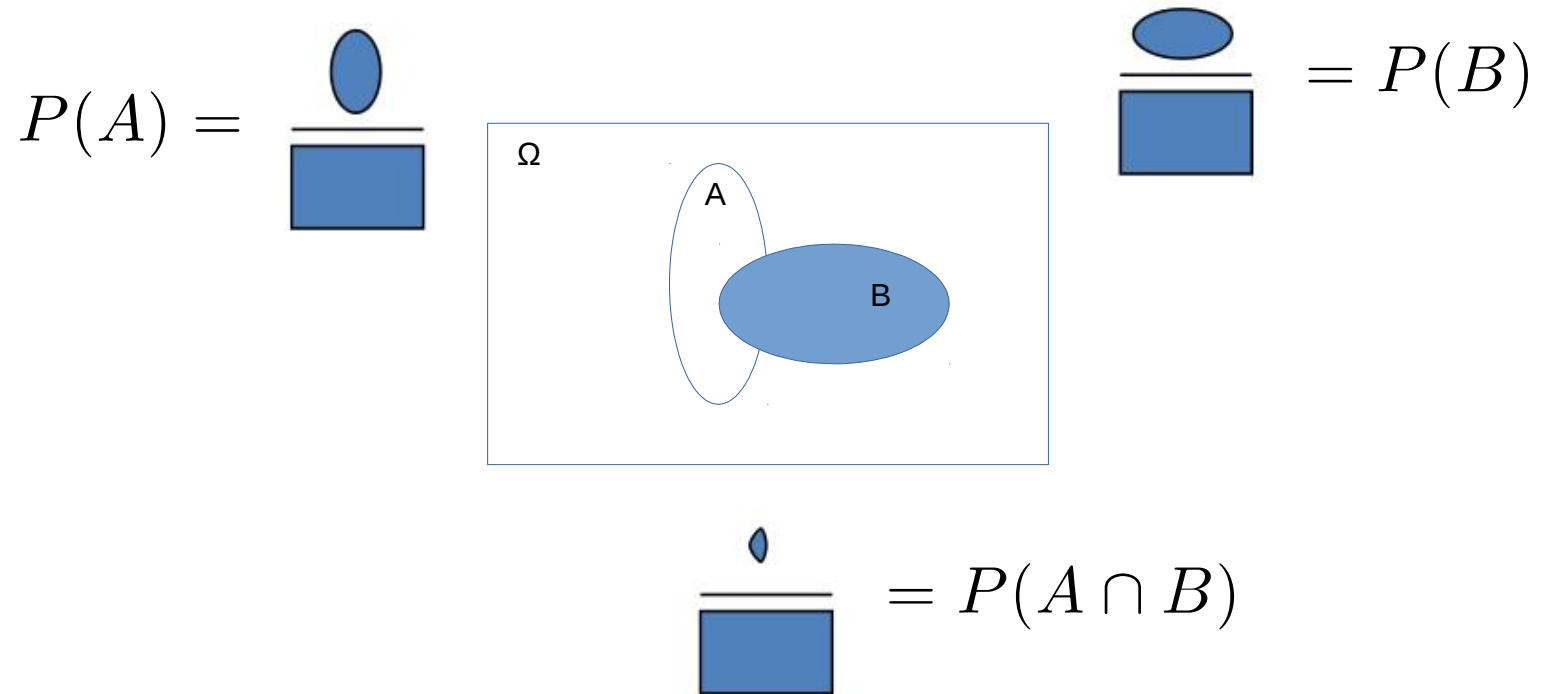
Ορισμοί: Τύπος Bayes (γραφικά)

$$P(A) = \frac{\text{Area of } A}{\text{Area of } \Omega}$$

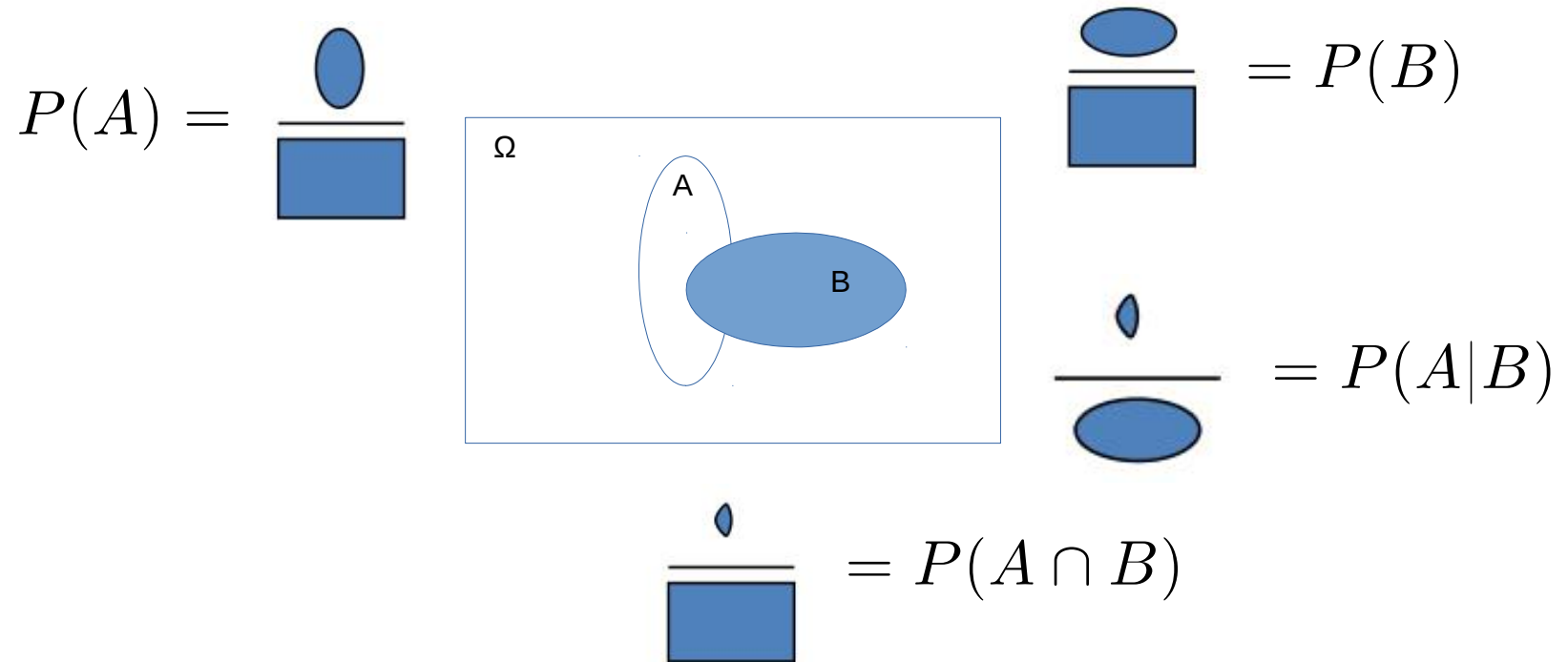


$$\frac{\text{Area of } B}{\text{Area of } \Omega} = P(B)$$

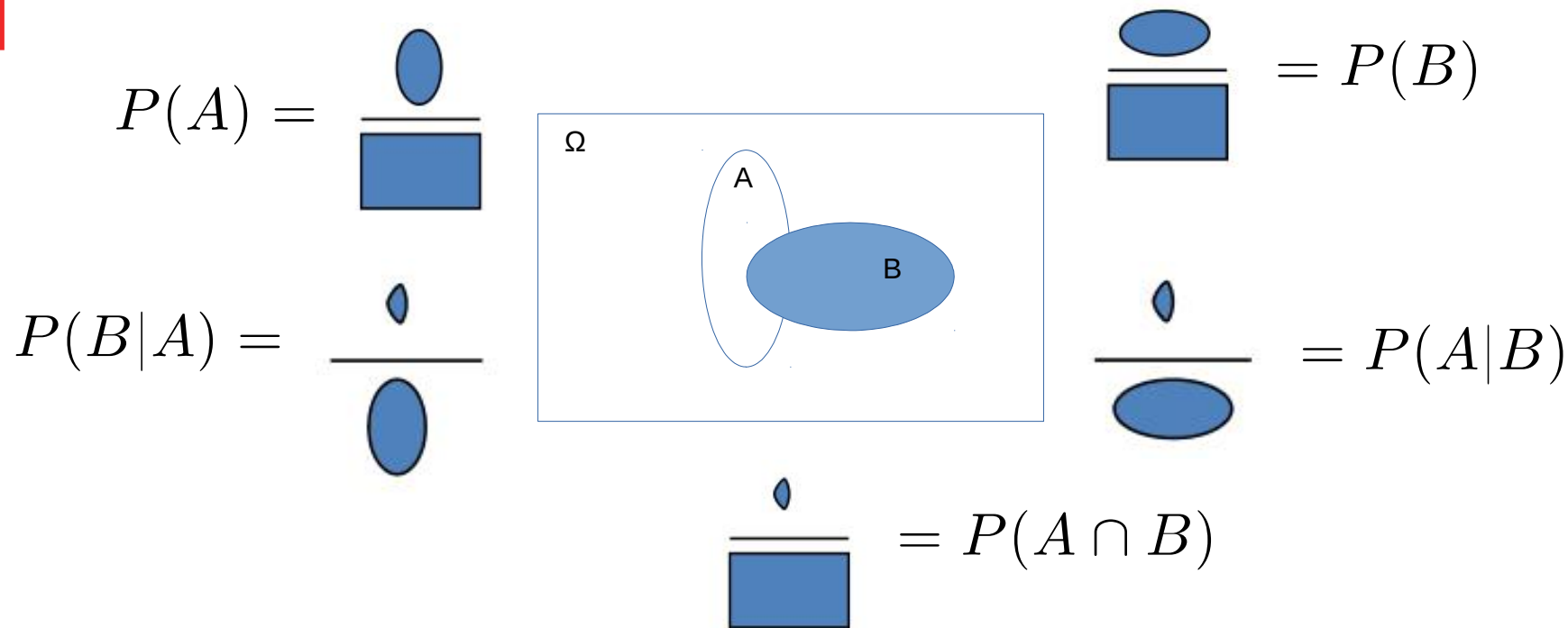
Ορισμοί: Τύπος Bayes (γραφικά)



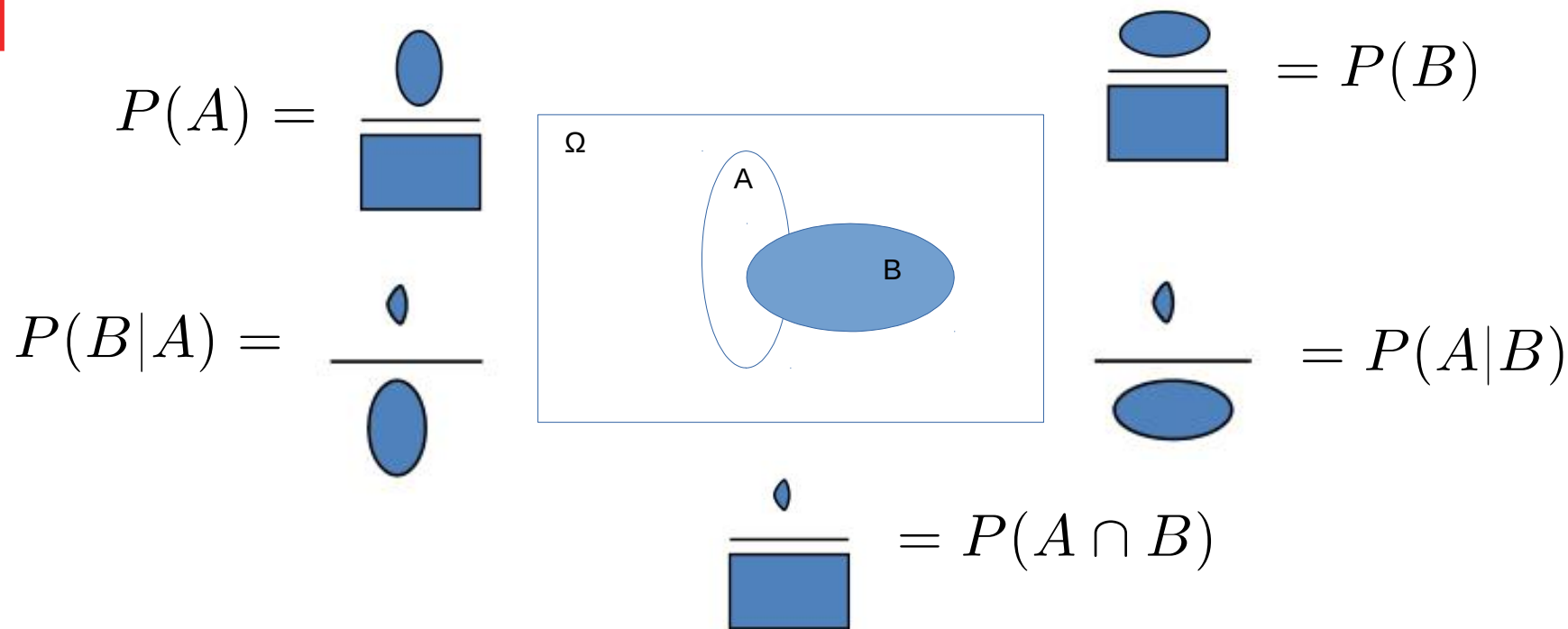
Ορισμοί: Τύπος Bayes (γραφικά)



Ορισμοί: Τύπος Bayes (γραφικά)



Ορισμοί: Τύπος Bayes (γραφικά)



$$P(A)P(B|A) =$$

$$P(B)P(A|B) =$$

Ορισμοί: Τύπος Bayes (γραφικά)

$$P(A) = \frac{\text{area of } A}{\text{area of } \Omega}$$

$$P(B) = \frac{\text{area of } B}{\text{area of } \Omega}$$

$$P(B|A) = \frac{\text{area of } B \cap A}{\text{area of } A}$$

$$P(A|B) = \frac{\text{area of } A \cap B}{\text{area of } B}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{area of } A \cap B}{\text{area of } \Omega}$$

$$P(A)P(B|A) = \frac{\text{area of } A}{\text{area of } \Omega} \times \frac{\text{area of } B \cap A}{\text{area of } A} = \frac{\text{area of } B \cap A}{\text{area of } \Omega}$$

$$P(B)P(A|B) = \frac{\text{area of } B}{\text{area of } \Omega} \times \frac{\text{area of } A \cap B}{\text{area of } B} = \frac{\text{area of } A \cap B}{\text{area of } \Omega}$$

Ορισμοί: Τύπος Bayes (γραφικά)

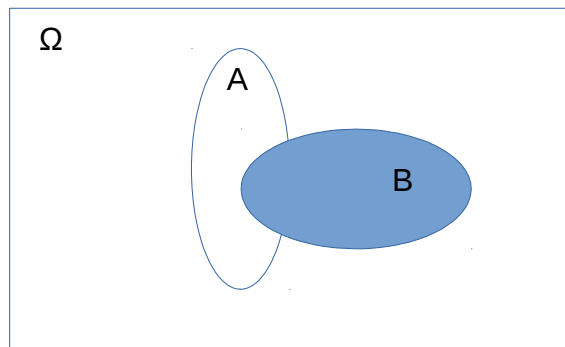
$$P(A) = \frac{\text{area of } A}{\text{area of } \Omega}$$

$$P(B) = \frac{\text{area of } B}{\text{area of } \Omega}$$

$$P(B|A) = \frac{\text{area of } B \cap A}{\text{area of } A}$$

$$P(A|B) = \frac{\text{area of } A \cap B}{\text{area of } B}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{area of } A \cap B}{\text{area of } \Omega}$$



$$P(A)P(B|A) = \frac{\text{area of } A}{\text{area of } \Omega} \times \frac{\text{area of } B \cap A}{\text{area of } A} = \frac{\text{area of } B \cap A}{\text{area of } \Omega}$$

$$P(B)P(A|B) = \frac{\text{area of } B}{\text{area of } \Omega} \times \frac{\text{area of } A \cap B}{\text{area of } B} = \frac{\text{area of } A \cap B}{\text{area of } \Omega}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A)$$



Κατανόηση του Bayes

Ποιες πιθανότητες συσχετίζει ?

$$P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(E)}$$

$$P(H)$$

Η πιθανότητα η υπόθεση (H: Hypothesis) να είναι αληθής χωρίς καμία πρότερη πληροφορία (E: Evidence)

$$P(E|H)$$

Η πιθανότητα να έχουμε την πληροφορία όταν η υπόθεση είναι αληθής

$$P(E)$$

Η πιθανότητα να έχουμε την πληροφορία

$$P(H|E)$$

Η πιθανότητα η υπόθεση (H: Hypothesis) να είναι αληθής έχοντας πρότερη πληροφορία (E: Evidence)



Όλοι χρησιμοποιούμε την Bayesian λογική!

Στην καθημερινότητά μας, διαρκώς καλούμαστε να κάνουμε εκτιμήσεις! Και συνεχώς αλλάζουμε (αναθεωρούμε) τις **εκτιμήσεις** αυτές υπό το φως **γεγονότων** που συμβαίνουν ή δεν συμβαίνουν.



Όλοι χρησιμοποιούμε την Bayesian λογική!

Στην καθημερινότητά μας, διαρκώς καλούμαστε να κάνουμε εκτιμήσεις! Και συνεχώς αλλάζουμε (ανανεώνουμε) τις **εκτιμήσεις** αυτές υπό το φως **γεγονότων** που συμβαίνουν ή δεν συμβαίνουν.

Για παράδειγμα μπορεί να **διστάσετε περισσότερο** να δώσετε εξετάσεις στο μάθημα της Στατιστικής αν **μάθετε** ότι ακόμη και οι καλύτεροι φοιτητές του προηγούμενου έτους **‘κοπήκανε’!**



Όλοι χρησιμοποιούμε την Bayesian λογική!

Στην καθημερινότητά μας, διαρκώς καλούμαστε να κάνουμε εκτιμήσεις! Και συνεχώς αλλάζουμε (ανανεώνουμε) τις **εκτιμήσεις** αυτές υπό το φως **γεγονότων** που συμβαίνουν ή δεν συμβαίνουν.

Για παράδειγμα μπορεί να **διστάσετε περισσότερο** να δώσετε εξετάσεις στο μάθημα της Στατιστικής αν **μάθετε** ότι ακόμη και οι καλύτεροι φοιτητές του προηγούμενου έτους **‘κοπήκανε’**!

Επίσης αν κληθείτε να μαντέψετε την πιθανότητα ένας άνδρας να είναι φαλακρός, θα αλλάξετε την εκτίμησή σας και θα προσεγγίσετε καλύτερα την πραγματική πιθανότητα αν σας αποκαλυφθεί η ηλικία του!

Όλοι χρησιμοποιούμε την Bayesian λογική!

Στην καθημερινότητά μας, διαρκώς καλούμαστε να κάνουμε εκτιμήσεις! Και συνεχώς αλλάζουμε (ανανεώνουμε) τις **εκτιμήσεις** αυτές υπό το φως **γεγονότων** που συμβαίνουν ή δεν συμβαίνουν.

Για παράδειγμα μπορεί να **διστάσετε περισσότερο** να δώσετε εξετάσεις στο μάθημα της Στατιστικής αν **μάθετε** ότι ακόμη και οι καλύτεροι φοιτητές του προηγούμενου έτους **‘κοπήκανε’**!

Επίσης αν κληθείτε να μαντέψετε την πιθανότητα ένας άνδρας να είναι φαλακρός, θα αλλάξετε την εκτίμησή σας και θα προσεγγίσετε καλύτερα την πραγματική πιθανότητα αν σας αποκαλυφθεί η ηλικία του!

Η παραπάνω συμπεριφορά οφείλεται στο ότι παρατηρούμε ενδεχόμενα που η πραγματοποίηση ή μη του ενός επηρεάζει κάποιο άλλο ενδεχόμενο. Στη θεωρία πιθανοτήτων η σχέση του Bayes σχετίζει μαθηματικά αυτές τις πιθανότητες.

Θεώρημα Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A)$$

Η πιθανότητα $P(A)$ ονομάζεται και 'εκ των προτέρων' (ή οριακή) πιθανότητα (**prior probability**). Είναι 'prior' με την έννοια ότι δεν υφίσταται καμία πρότερη γνώση (πληροφορία) σχετικά με το ενδεχόμενο B . (Αντίστοιχα και για την $P(B)$).

Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|B)$ (όπως ορίσθηκε και νωρίτερα) καλείται και 'εκ των υστέρων' πιθανότητα (**posterior probability**), επειδή προκύπτει 'κατόπιν' της πληροφορίας για το ενδεχόμενο B . (Αντίστοιχα και για την $P(B|A)$).

Η σχέση Bayes συνδέει τις δεσμευμένες και τις οριακές πιθανότητες των ενδεχομένων A και B .

Today's predictions are tomorrow's priors.



Θεώρημα Bayes

Bayesian approach: Probability is a measure of the **degree of belief** that an event will occur

Στην κατά Bayes προσέγγιση χρησιμοποιούμε την υποκειμενική πιθανότητα (πόσο πιστεύουμε στην αρχική μας υπόθεση).

Posterior probability
(αφού 'δούμε' τα data)



Prior probability

(πριν 'δούμε' τα data – υποκειμενική υπόθεση)



$$P(Theory|Data) = \frac{P(Theory)}{P(Data)} P(Data|Theory)$$

Πιθανότητα 'ποντάροντας' στην υπόθεση



Το θεώρημα Bayes υπαγορεύει πόσο πρέπει αν αλλάξει η υποκειμενική υπόθεση (Theory) όταν έρθουν στο φως τα αποτελέσματα (Data).

Νόμος Ολικής Πιθανότητας

Έστω δειγματικός χώρος Ω
και υποσύνολα A_i
(ασυμβίβαστα) τέτοια ώστε:

$$\bigcup_i^{\infty} A_i = \Omega \quad \text{then}$$

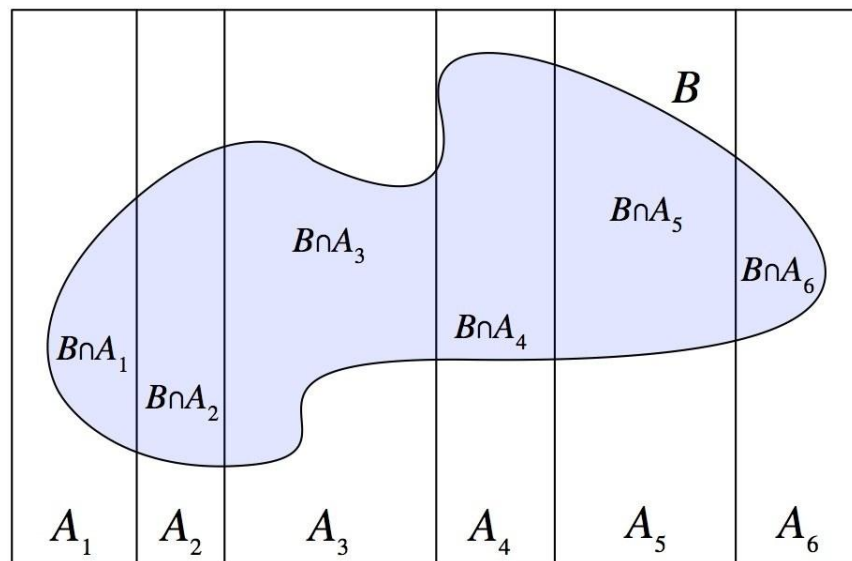
$$B = (B \cap \Omega) = (B \cap \bigcup_i A_i) = \bigcup_i (B \cap A_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = P(\bigcup_i (B \cap A_i)) = \sum_i P(\bigcup_i (B \cap A_i)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i) \quad (\text{Law of total probability})$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

Bayes' Theorem



Άσκηση

Υποθέτουμε ότι έχουμε τρία ζάρια, με το πρώτο να είναι αμερόληπτο, το δεύτερο να μην μπορεί να φέρει ποτέ 6, και το τρίτο να έχει $P('6') = 2/3$. Επιλέγουμε ένα στην τύχη, το ρίχνουμε δύο φορές και φέρνουμε δύο συναπτά 6άρια. Ποια η πιθανότητα να επιλέξαμε το δίκαιο ζάρι; Σχολιάσετε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 4

Υποθέτουμε ότι έχουμε τρία ζάρια, με το πρώτο να είναι αμερόληπτο, το δεύτερο να μην μπορεί να φέρει ποτέ 6, και το τρίτο να έχει $P('6') = 2/3$. Επιλέγουμε ένα στην τύχη, το ρίχνουμε δύο φορές και φέρνουμε δύο συναπτά 6άρια. Ποια η πιθανότητα να επιλέξαμε το δίκαιο ζάρι; Σχολιάσετε το αποτέλεσμα.

Λύση:

Αναγνωρίζουμε την πιθανότητα που ζητείται να υπολογίσουμε ‘έχω επιλέξει το δίκαιο ζάρι, όταν (**given**) έχω φέρει δύο συνεχόμενα αποτελέσματα 6’.

Άσκηση 4

Υποθέτουμε ότι έχουμε τρία ζάρια, με το πρώτο να είναι αμερόληπτο, το δεύτερο να μην μπορεί να φέρει ποτέ 6, και το τρίτο να έχει $P('6') = 2/3$. Επιλέγουμε ένα στην τύχη, το ρίχνουμε δύο φορές και φέρνουμε δύο συναπτά 6άρια. Ποια η πιθανότητα να επιλέξαμε το δίκαιο ζάρι; Σχολιάσετε το αποτέλεσμα.

Λύση:

Αναγνωρίζουμε την πιθανότητα που ζητείται να υπολογίσουμε ‘έχω επιλέξει το δίκαιο ζάρι, όταν (**given**) έχω φέρει δύο συνεχόμενα αποτελέσματα 6’.

Πρέπει να ορίσω σωστά τα ενδεχόμενα που σχετίζονται με τις πιθανότητες που περιγράφουν τα δεδομένα.

Έστω “F” (Fair) το ενδεχόμενο να επιλέξω το αμερόληπτο ζάρι,

“ Z_1 ” να έχω επιλέξει το ζάρι που δεν φέρνει ποτέ 6,

“ Z_2 ” το ενδεχόμενο να έχω επιλέξει το ζάρι που δείχνει προτίμηση προς το 6 και

“66” το ενδεχόμενο να έχω φέρει δύο συνεχόμενα 6άρια.

Ζητώ τη πιθανότητα $P(F|66)$ που είναι μια δεσμευμένη πιθανότητα.

Άσκηση 4

Ζητώ τη πιθανότητα $P(\Delta|66)$ που είναι μια δεσμευμένη πιθανότητα.

Από το θεώρημα Bayes έχω:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

και εφαρμόζουμε αντίστοιχα:

$$P(F|66) = \frac{P(F)P(66|F)}{P(66|F)P(F) + P(66|Z_1)P(Z_1) + P(66|Z_2)P(Z_2)}$$

οι επιμέρους πιθανότητες (και δεσμευμένες πιθανότητες) που εμφανίζονται στην σχέση είναι $1/3$, $1/36$, 0 και $4/9$ και τελικά η ζητούμενη πιθανότητα προκύπτει ίση με

Άσκηση 4

$$P(F|66) = \frac{P(F)P(66|F)}{P(66|F)P(F) + P(66|Z_1)P(Z_1) + P(66|Z_2)P(Z_2)}$$

οι επιμέρους πιθανότητες (και δεσμευμένες πιθανότητες) που εμφανίζονται στην σχέση είναι

1/3 η πιθανότητα να επιλέξω τυχαία το αμερόληπτο ζάρι,

1/36 να φέρω συναπτά δάρια με το αμερόληπτο ζάρι,

0 η πιθανότητα να φέρω συναπτά δάρια με το Z_1 ,

4/9 η πιθανότητα να φέρω συναπτά δάρια με το Z_2 ,

και τελικά η ζητούμενη πιθανότητα προκύπτει ίση με 1/17 ή 5.88%

Άσκηση 4

* Παρατηρήσεις/σχόλια

α) το αποτέλεσμα προέκυψε να είναι δύο συνεχόμενα δάρια, άλλα η λογική μας οδηγεί να αναμένουμε αυτό να είναι το Z_2 . Προφανώς η πιθανότητα να έχει προκύψει αυτό το αποτέλεσμα στο πείραμα τύχης, με το αμερόληπτο ζάρι θα περιμένουμε να είναι αρκετά μικρή.

β) κάποιος ίσως γράψει απλά τον τύπο Bayes όπου στον παρονομαστή θα εμφανιστεί η πιθανότητα $P(66)$.

Για να υπολογίσω την $P(66)$, θα πρέπει να θεωρήσω όλα τα πιθανά 'σενάρια' που μπορώ να φέρω δύο συναπτά δάρια, και αυτό μπορεί θεωρητικά να γίνει επιλέγοντας (στην τύχη, άρα $1/3$) οποιοδήποτε από τα τρία ζάρια και κατόπιν να υπολογίσω την πιθανότητα για το καθένα να φέρει σε δύο συνεχής ρίψεις 6 ($1/6 * 1/6$ για το F, 0 για το Z_1 και $2/3 * 2/3$ για το Z_2)