

Τυχαίες Μεταβλητές: Καλούμε «τυχαίες μεταβλητές» τις μεταβλητές εκείνες που αδυνατούμε να τους προσδώσουμε συγκεκριμένη τιμή αλλά μπορούμε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα να λάβουν μία από τις επιτρεπτές τιμές. Το αποτέλεσμα κάθε μέτρησης είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Πιθανότητα:

Έστω Ω είναι το σύνολο όλων των δυνατών στοιχειωδών γεγονότων, X_i , που είναι δυνατόν να συμβούν, καθώς επίσης και ότι μόνο ένα από αυτά μπορεί να συμβεί κάθε φορά. Τότε, η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός X_i , $P(X_i)$, ορίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

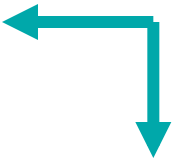
- 1. $P(X_i) \geq 0$ για κάθε $X_i \in \Omega$
- 2. $P(X_i \text{ OR } X_j) = P(X_i) + P(X_j)$
- 3. $\sum_{\Omega} P(X_i) = 1$

$$P(X) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_x}{N}$$

Το Θεώρημα Bayes : Έστω δύο κατηγορίες γεγονότων, A και B. Η πιθανότητα ώστε ένα γεγονός να ανήκει συγχρόνως στις κατηγορίες A και B εκφράζεται ως:

$$P(A \text{ AND } B) = P(A|B) P(B) = P(B|A) P(A)$$

$$P(A|B) = P(B|A) P(A) / P(B)$$



χρησιμοποιώντας τις εύλογες προτάσεις ότι:

$$P(B) = P(B \text{ AND } A) + P(B \text{ AND } \neg A) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\neg A) \cdot P(\neg A) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\neg A) \cdot (1 - P(A))$$

$$P(\neg A) = 1 - P(A)$$

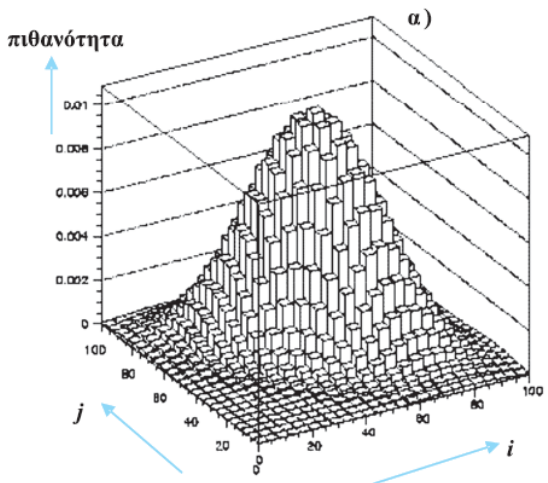
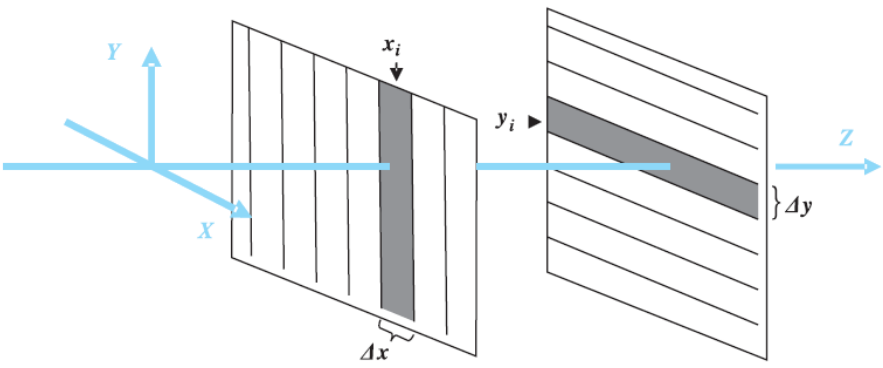
$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\neg A) \cdot [1 - P(A)]}$$

Το Θεώρημα Bayes προσφέρει τη δυνατότητα υπολογισμού της πιθανότητας $P(A | B)$ η οποία εκφράζει την εμπιστοσύνη μας στην υπόθεση A μετά την παρατήρηση του αποτελέσματος B (ύστερη γνώση).

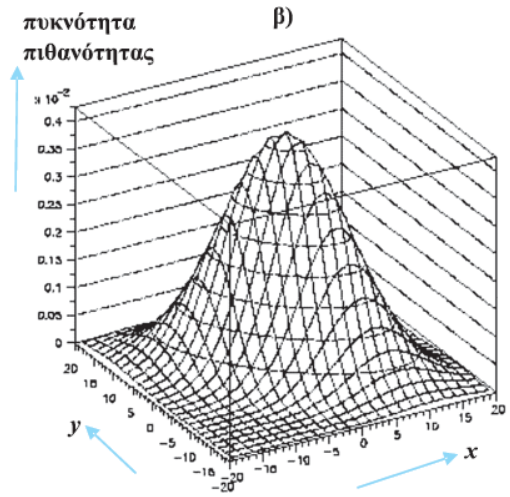
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f(x,y)$, θα ορίζεται ως:

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(\Delta x, \Delta y)}{(\Delta x \cdot \Delta y)} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{n_{xy}}{N} \right)$$

όπου από τις N τιμές των τυχαίων μεταβλητών $\{x,y\}$ υπάρχουν n_{xy} τιμές που ανήκουν στο διάστημα τιμών $\Delta x \cdot \Delta y$.



$$\rho_{ij} = \frac{P_{ij}}{\Delta x \cdot \Delta y}$$



$$P_{ij} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{ij}}{N} \quad \text{ή} \quad P_{ij} \equiv \frac{n_{ij}}{N}, \text{ για } N \text{ μεγάλο}$$

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{P(\Delta x, \Delta y)}{(\Delta x \cdot \Delta y)} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{n_{xy}}{N} \right)$$

Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας. Ορίζουμε ως «αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας» (cumulative probability function) της τυχαίας μεταβλητής X , με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, τη συνάρτηση $F(y)$, που εκφράζει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμή μικρότερη ή ίση από την τιμή y :

$$F(y) = \int_{-\infty}^y f(x)dx = P(x \leq y)$$

Αλλαγή Μεταβλητών:

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ με κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$. Έστω οι «ένα προς ένα» μετασχηματισμοί:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = h_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \\ y_2 = h_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \\ y_3 = h_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \\ \dots\dots\dots \\ y_N = h_N(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \end{array} \right\}$$

Η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $g(y_1, y_2, y_3, \dots, y_N)$, των τυχαίων μεταβλητών $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N$ εκφράζεται από τη σχέση:

$$g(y_1, y_2, y_3, \dots, y_N) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)}{|J|}$$

η Ιακωβιανή (Jacobian) ορίζουσα

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_N}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_N}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_N} & \frac{\partial h_2}{\partial x_N} & \cdots & \frac{\partial h_N}{\partial x_N} \end{vmatrix}$$

Αναμενόμενη Τιμή: Η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής x (συμβολίζεται ως $E[x]$) ορίζεται από τη σχέση:

$$E[x] = \int_{\Omega} x \cdot f(x) dx$$

όπου $f(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και Ω δηλώνει όλο το πεδίο ορισμού της μεταβλητής x .

Διασπορά: Η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής $(x-E[x])^2$ καλείται «διασπορά» (ή «τετραγωνική απόκλιση») και εκφράζεται ως:

$$\mu = E[x] = \int_{\Omega} x \cdot f(x) dx$$

$$V[x] = E[(x - \mu)^2] = \int_{\Omega} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$$

$$\rho = E[\varepsilon(x)] = \int_{\Omega} \varepsilon(x) \cdot f(x) dx$$

$$E[(\varepsilon(x) - \rho)^2] = \int_{\Omega} (\varepsilon(x) - \rho)^2 \cdot f(x) dx$$

Εάν η τυχαία μεταβλητή λαμβάνει διακριτές τιμές, η μέση τιμή και η διασπορά (ή τετραγωνική απόκλιση) ορίζονται ως αθροίσματα για όλες τις δυνατές τιμές της τυχαίας μεταβλητής:

$$\begin{aligned} E[x] &= \mu = \sum_{i=1}^N x_i \cdot f(x_i), \quad V[x] = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i) \\ V[x] &= E[(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu \cdot x + \mu^2) \cdot f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 = E[x^2] - (E[x])^2 \end{aligned}$$

Επισημαίνεται ότι η μέση τιμή και η τετραγωνική απόκλιση είναι αριθμοί και όχι συναρτήσεις των τυχαίων μεταβλητών

Αναμενόμενη Τιμή και Διασπορά: Συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών

$$E[g(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot f(x, y) dx dy$$

$$V[g(x, y)] = E\left[\left(g(x, y) - E[g(x, y)]\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(g(x, y) - E[g(x, y)]\right)^2 \cdot f(x, y) dx dy$$

$$\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy$$

$$\mu_y = E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y) dx dy$$

$$\sigma_x^2 = V[x] = E\left[(x - \mu_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot f(x, y) dx dy$$

$$\sigma_y^2 = V[y] = E\left[(y - \mu_y)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 \cdot f(x, y) dx dy$$

«**Αμοιβαία ανεξάρτητες**» είναι οι τυχαίες μεταβλητές των οποίων η κοινή πυκνότητα συνάρτησης πιθανότητας, , είναι εντελώς παραγοντοποιήσιμη, δηλαδή:

$$f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_N) = f(x_1) \cdot f(x_2) \dots \cdot f(x_N)$$

Σε αντίθετη περίπτωση, οι τυχαίες μεταβλητές καλούνται «**αμοιβαία εξαρτώμενες**».

Συνδιασπορά:

Για κάθε ζεύγος (x_i, x_j) εκ των τυχαίων μεταβλητών $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)^T$ με κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ ορίζουμε ως «συνδιασπορά» (covariance) την ποσότητα:

$$\text{cov} [x_i, x_j] = E[(x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j) \cdot f(x_1, x_2, ..., x_N) dx_1 dx_2 ... dx_N$$

όπου μ_i και μ_j είναι οι αναμενόμενες τιμές ($\mu_i = E[x_i]$, $\mu_j = E[x_j]$)

Ορίζουμε επίσης ως «**συντελεστή συσχετισμού**» (correlation coefficient) την ποσότητα:

$$\text{corr} [x_i, x_j] = \rho(x_i, x_j) = \frac{\text{cov} [x_i, x_j]}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \qquad -1 \leq \rho(x, y) \leq 1$$

σ_i και σ_j είναι οι τετραγωνικές ρίζες της διασποράς

$$\begin{aligned} \text{cov} [x_i, x_j] &= E[(x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j)] = E[(x_i \cdot x_j + \mu_i \cdot \mu_j - \mu_j \cdot x_i - \mu_i \cdot x_j)] : \\ &= E[x_i \cdot x_j] + \underbrace{E[\mu_i \cdot \mu_j]}_{\mu_i \cdot \mu_j} - \underbrace{E[\mu_j \cdot x_i]}_{\mu_j \cdot E[x_i]} - \underbrace{E[\mu_i \cdot x_j]}_{\mu_i \cdot E[x_j]} = E[x_i \cdot x_j] - \mu_i \cdot \mu_j \end{aligned}$$

Εάν οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 , οι οποίες παίρνουν τιμές στο Ω και έχουν κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f(x_1, x_2)$, είναι αμοιβαία ανεξάρτητες, τότε για κάθε ζεύγος συναρτήσεων των τυχαίων μεταβλητών $u(x_1)$ και $v(x_2)$ θα ισχύει ότι:

$$E[u(x_1) \cdot v(x_2)] = E[u(x_1)] \cdot E[v(x_2)]$$

$$E[u(x_1) \cdot v(x_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1) \cdot v(x_2) \cdot f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1) \cdot f_1(x_1) dx_1 \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} v(x_2) \cdot f_2(x_2) dx_2 \right) = E[u(x_1)] \cdot E[v(x_2)]$$

$$\text{cov} [x_1, x_2] = E[x_1 \cdot x_2] - E[x_1] \cdot E[x_2] = 0$$

Η διασπορά της **γραμμικής συνάρτησης** $y = y(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N a_i \cdot x_i$

των τυχαίων μεταβλητών $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ εκφράζεται συναρτήσει των τετραγωνικών αποκλίσεων και της συνδιασποράς (ανά δύο) των τυχαίων μεταβλητών $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, ως ακολούθως:

$$V \left[\sum_i a_i \cdot x_i \right] = \left(\sum_i a_i^2 \cdot V[x_i] \right) + 2 \cdot \left(\sum_{\substack{i,j \\ i>j}} a_i \cdot a_j \cdot \text{cov}[x_i, x_j] \right)$$

$$E[y(x_1, x_2, \dots, x_N)] = E \left[\sum_{i=1}^N a_i x_i \right] = \sum_{i=1}^N a_i \cdot E[x_i] = \sum_{i=1}^N a_i \mu_i$$

Μπορεί επίσης να γραφεί ως:

$$V \left[\sum_i a_i \cdot x_i \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i \cdot a_j \cdot \text{cov}[x_i, x_j]$$

Εάν $\text{cov}[x_i, x_j] = 0 \Rightarrow V \left[\sum_i a_i \cdot x_i \right] = \left(\sum_i a_i^2 \cdot V[x_i] \right)$

Έστω x_i είναι **N** αμοιβαία ανεξάρτητες δοκιμές (επαναλήψεις) του ίδιου πειράματος.

$$\mu_i = E[x_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \dots \mathbf{f}(\mathbf{x}_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = \mu$$

$$V[x_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \dots \mathbf{f}(\mathbf{x}_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = V[x] = \sigma^2$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) = \langle \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \quad E[\langle x \rangle] = \frac{1}{N} \cdot E \left[\sum_{i=1}^N x_i \right] = \frac{1}{N} \cdot N \cdot \mu = \mu \quad V \left[\frac{1}{N} \sum_i x_i \right] = \frac{1}{N^2} \cdot \sum V[x_i] + \frac{2}{N^2} \cdot \sum_{i=j+1}^N \sum_{i=1}^N \underbrace{\text{cov}[x_i, x_j]}_0 = \frac{\sigma^2}{N}$$

Συναρτήσεις Τυχαίων Μεταβλητών

Η αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_N$,

$y = f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ δίνεται από την προσεγγιστική σχέση:

$$E[f(\underline{x})] \approx f(\underline{\mu}) \quad \text{όπου} \quad \underline{\mu} \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$$

όπου $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$ είναι οι αναμενόμενες τιμές των τυχαίων μεταβλητών.

Η διασπορά της συνάρτησης των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_N$ δίνεται από τη σχέση:

$$V[f(x_1, x_2, \dots, x_N)] \approx \sum_{i=1}^N V[x_i] \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i} \right)_{\underline{x}=\underline{\mu}}^2 + 2 \cdot \sum_{i=j+1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i} \right)_{\underline{x}=\underline{\mu}} \cdot \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_j} \right)_{\underline{x}=\underline{\mu}} \text{cov}[x_i, x_j]$$
$$V[f(x_1, x_2, \dots, x_N)] \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i} \right)_{\underline{x}=\underline{\mu}} \cdot \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_j} \right)_{\underline{x}=\underline{\mu}} \cdot \text{cov}[x_i, x_j]$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ καλείται «**χαρακτηριστική συνάρτηση**»:

$$\varphi_{\mathbf{x}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot f(x) dx = E[e^{itx}] \quad \text{για } t \text{ πραγματικό}$$

Στην περίπτωση που η μεταβλητή παίρνει διακριτές τιμές, η χαρακτηριστική συνάρτηση ορίζεται ως:

$$\varphi_{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) \cdot e^{itx_k} = E[e^{itx_k}] \quad \text{για } t \text{ πραγματικό}$$

Εάν η $f(x)$ είναι συνεχής παντού στο πεδίο ορισμού της, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση ορίζει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής ως:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\mathbf{x}}(t) \cdot e^{-itx} dt$$