Διωνυμική Συνάρτηση Πιθανότητας

Η διωνυμική συνάρτηση πιθανότητας εκφράζει με τη σχέση:

$$\mathbf{P(r;N,p)} = \binom{N}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{N-r} = \frac{N!}{r! \cdot (N-r)!} \cdot p^r \cdot (1-p)^{N-r}$$

την πιθανότητα να έχουμε ακριβώς r επιτυχίες σε N δοκιμές, όταν η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή είναι σταθερή και ίση με p, όπου r και N είναι θετικοί ακέραιοι και p είναι πραγματικός αριθμός στο διάστημα $0 \le p \le 1$

Αναμενόμενη τιμή: $E[r] = \sum_{r=0}^{\infty} r \cdot P(r;N,p) = N \cdot p$

Διασπορά: $V[r] = \sum_{r=0}^{\infty} (Np - r)^2 \cdot P(r) = N \cdot p \cdot (1-p)$

Ασυμμετρία: $\gamma_1 = \dfrac{1 - 2 \cdot p}{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Κύρτωση: $\gamma_2 = \dfrac{1 - 6 \cdot p \cdot (1-p)}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$

Χαρακτηριστική συνάρτηση: $\phi(t) = \left[p \cdot e^{it} + (1-p) \right]^n$

Σε μια συστοιχία ανιχνευτών φορτισμένων σωματιδίων χρησιμοποιούμε τρεις ανιχνευτές. Η αποδοτικότητα του κάθε ανιχνευτή είναι 95%, αλλά χρειαζόμαστε αποκρίσεις και από τους τρεις ανιχνευτές συγχρόνως για να είμαστε βέβαιοι ότι ένα σωματίδιο πέρασε διαμέσου της ανιχνευτικής συστοιχίας. Ποια είναι η συνολική αποδοτικότητα του συστήματος;

$$P(3) = \binom{3}{3} \cdot 0.95^3 \cdot (1 - 0.95)^0 = 0.95^3 = 0.857$$

Ποια θα είναι η αποδοτικότητα του συστήματος εάν χρησιμοποιήσουμε τέσσερις ανιχνευτές και ζητήσουμε τουλάχιστον οι τρεις από αυτούς να δίνουν θετική απόκριση;

$$\binom{4}{3} \cdot 0.95^3 \cdot (1 - 0.95)^1 + \binom{4}{4} \cdot 0.95^4 \cdot (1 - 0.95)^0 = 0.986$$

Πολυωνυμική Συνάρτηση Πιθανότητας

Η γενίκευση της διωνυμικής συνάρτησης πιθανότητας για την περίπτωση πειράματος με περισσότερα από δύο δυνατά αποτελέσματα λέγεται *πολυωνυμική* (multonomial) συνάρτηση πιθανότητας και εκφράζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{P(r_1, r_2, \ldots, r_k) = \frac{N!}{r_1! r_2! \ldots r_k!} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k} = N! \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{r_i}}{r_i!}}$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \sum_{i=1}^{k} r_i = N$$

$$E[r_i] = N \cdot p_i$$

$$V[r_i] = N \cdot p_i \cdot (1 - p_i)$$

$$\boxed{\operatorname{cov}[r_i, r_j] = N \cdot p_i \cdot p_j}$$

Το πλέον σύνηθες παράδειγμα τυχαίων μεταβλητών με πολυωνυμική συνάρτηση πιθανότητας αποτελούν οι πληθυσμοί γεγονότων των ιστών ενός ιστογράμματος.

Για ιστούς περιορισμένου εύρους, ώστε p_i<<1

$$V[r_i] = N \cdot p_i \cdot (1 - p_i) \approx N \cdot p_i$$

$$\delta_{r_i} = \sqrt{V[r_i]} \approx \sqrt{r_i}$$

Είναι δυνατόν να αποφύγουμε την αμοιβαία εξάρτηση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών r_i εάν ο συνολικός αριθμός γεγονότων θεωρηθεί και αυτός τυχαία μεταβλητή. POISSON

Η Συνάρτηση Πιθανότητας Poisson

Η συνάρτηση πιθανότητας Poisson βρίσκει εφαρμογές σε περιπτώσεις δοκιμών επιτυχίας όταν οι δοκιμές είναι αμοιβαία ανεξάρτητες και δεν είναι καθορισμένο το συνολικό πλήθος των δοκιμών.

$$\mathbf{P(r;\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{r}}{r!}}$$

Αναμενόμενη τιμή: $\mu = E[r] = \lambda$

Διασπορά: $V[r] = \lambda$

Καμπυλότητα: $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$

Κύρτωση: $\gamma_2 = \dfrac{1}{\mu}$

Χαρακτηριστική συνάρτηση: $\phi(t) = e^{\mu\left[e^{it}-1\right]}$

$$P(x;\mu_x) = \frac{\left(\mu_x\right)^{x} \cdot e^{-\mu_x}}{x!}, \qquad P(y;\mu_y) = \frac{\left(\mu_y\right)^{y} \cdot e^{-\mu_y}}{y!}$$

$$P(x+y;\mu_x+\mu_y) = \frac{\left(\mu_x+\mu_y\right)^{x+y} \cdot e^{-\left(\mu_x+\mu_y\right)}}{(x+y)!}$$

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας Gauss

$$P(x)dx = N\left(\mu,\sigma^2\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\left[0.5\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]}dx$$

Αναμενόμενη τιμή: $E[x] = \mu$

Διασπορά: $V[x] = \sigma^2$

Καμπυλότητα: $\gamma_1 = 0$

Κύρτωση: $\gamma_2 = 0$

Χαρακτηριστική συνάρτηση: $\phi(t) = e^{i\cdot t\cdot\mu - \frac{1}{2}\cdot t^2\cdot\sigma^2}$

Κεντρικές ορμές: $\mu_{2r} = \frac{(2r)!}{2^r\cdot(r)!}\cdot\sigma^{2r}$, $\mu_{2r+1} = 0$ $r \ge 1$

Συνήθως καλούμε τη συνάρτηση Gauss *κανονική* (normal) *συνάρτηση πιθανότητας* και η *αθροιστική* της (cumulative) συνάρτηση:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\int_0^x e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{-\frac{\chi^2}{2}}d\chi, \qquad \chi = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\underline{x} = \left(x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_N\right)^T$$

$$\underline{\mu} = \left(\mu_1 \quad \mu_2 \quad \ldots \quad \mu_N\right)^T$$

$$\underset{\sim}{V}\left(V_{ij} = \mathrm{cov}\left[x_i, x_j\right]\right)$$

$$N\left(x;\mu_1,\sigma_1^2\right) \qquad N\left(y;\mu_2,s_2^2\right)$$

$$N\left(ax+by;a\mu_1+b\mu_2,\, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2\right)$$

$$\sigma_x^2 = V\left[x\right], \qquad \sigma_y^2 = V\left[y\right]$$

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}\left[x,y\right]}{\sigma_x\cdot\sigma_y}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y\cdot\sqrt{\left(1-\rho^2\right)}}\cdot e^{\left[-\frac{1}{2\cdot\left(1-\rho^2\right)}\cdot\left(\frac{\left(x-\mu_x\right)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{\left(x-\mu_x\right)^2\cdot\left(y-\mu_y\right)^2}{\sigma_x\cdot\sigma_y} + \frac{\left(y-\mu_y\right)^2}{\sigma_y^2}\right)\right]}$$

Ομοιόμορφη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{για} \quad a \le x \le b$$

$$f(x) = 0 \quad \text{για} \quad a \ge x \quad \text{και} \quad x \ge b$$

Αναμενόμενη τιμή: $E[x] = (b-a)/2$

Διασπορά: $V\left[x\right] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Καμπυλότητα: $\gamma_1 = 0$

Κύρτωση: $\gamma_2 = -1.2$

Χαρακτηριστική συνάρτηση: $\phi(t) = \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2} it \cdot (b-a)\right)}{it \cdot (b-a)} + \frac{1}{2} it \cdot (b-a)$

Ασυμπτωτική Συμπεριφορά Κατανομών

Πολλές από τις ευρέως χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις (πυκνότητας) πιθανότητας, όπως η διωνυμική, πολυωνυμική, Poisson, χ2, Studnts-t, Fisher κτλ., τείνουν ασυμπτωτικά προς την κανονική συνάρτηση καθώς το πλήθος των παρατηρούμενων συμβάντων τείνει στο άπειρο.

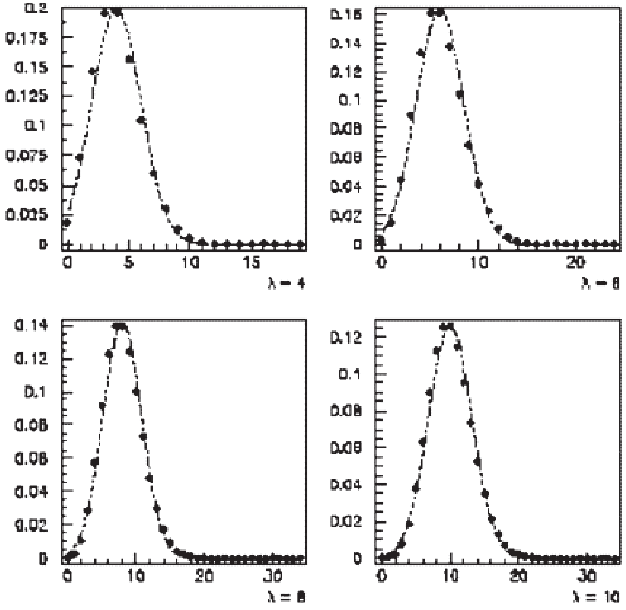
$$\mathbf{P(r;\mu) = \frac{e^{-\mu}\cdot\mu^{r}}{r!}}$$

Ο παρατηρούμενος αριθμός συμβάντων είναι το άθροισμα ανεξάρτητων γεγονότων, με πιθανότητα να συμβεί το καθένα ίση με p,

$$r = x_1 + x_2 + \ldots x_N$$

$$\left.\begin{array}{l} P(x_i = 1) = p \\ P(x_i = 0) = 1 - p \end{array}\right\} i = 1, 2, 3, \ldots N$$

Ικανοποιούνται οι βασικές προϋποθέσεις του θεωρήματος του κεντρικού ορίου. Καθώς το πλήθος γεγονότων τείνει στο άπειρο, το άθροισμα r θα πρέπει να κατανέμεται σύμφωνα με Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

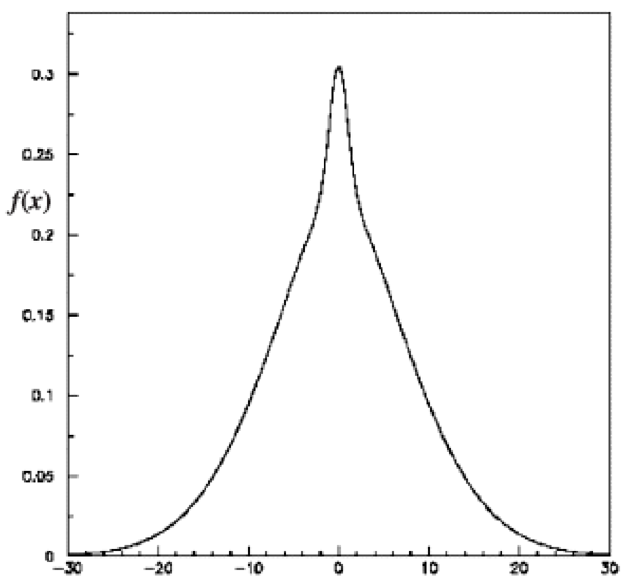


Κατανομές Πειραματικών Μετρήσεων

Όταν εκπληρούνται οι κατάλληλες προϋποθέσεις ώστε να μπορούμε να επικαλεστούμε τις συνέπειες του θεωρήματος του κεντρικού ορίου, το άθροισμα αμοιβαία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών έχει κανονική (Gaussian) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Αντιθέτως, το άθροισμα κανονικών συναρτήσεων πιθανότητας δεν καταλήγει πάντοτε σε κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Ας υποθέσουμε ότι τα αποτελέσματα των μετρήσεων μιας φυσικής ποσότητας που συλλέγονται σε ένα πείραμα ανήκουν σε K κατηγορίες.

Κάθε κατηγορία μετρήσεων περιγράφεται με κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $N(x;\mu, \sigma_i)$, με αναμενόμενη τιμή μ ίση με την αληθή τιμή του φυσικού μεγέθους και διασπορά σ^2_i (i=1, 2, 3, …, K). Εάν, επίσης, θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα να προκύψει ένα αποτέλεσμα μέτρησης από την κατηγορία i είναι p_i τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μετρήσεων είναι:



Άθροισμα πέντε κανονικών συναρτήσεων πυκνότητας με αναμενόμενη τιμή ίση με μηδέν και σ= 1, 3.5, 5, 7.5 και 10.

$$\mathbf{f(x)} = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{p_i} \cdot \mathbf{N(x;}\mu, \sigma_i\mathbf{)}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{K} \mathbf{p_i} = \mathbf{1} \right)$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}} \cdot \sqrt{\mathbf{E^2 - P^2 \cdot c^2}}$$

$$\sigma_E = \sigma_E(E)\, \alpha\lambda\lambda\eta\lambda\varepsilon\pi\iota\delta\rho\alpha\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ \upsilon\lambda\eta$$

$$\sigma_P = \sigma_P(P)\, \kappa\iota\nu\eta\sigma\eta\ \sigma\varepsilon\ \text{Μαγν. Πεδιο}$$