

Διακριτική Ικανότητα

Η πιθανότητα να βρεθεί το αποτέλεσμα μιας μέτρησης του μεγέθους E (π.χ. ενέργεια ηλεκτρονίου) στο διάστημα τιμών [E_m, E_m+dE_m], δεδομένου ότι η αληθής τιμή (πραγματική ενέργεια του ηλεκτρονίου) είναι E_R, θα είναι:

$$P(E_m|E_R)=g(E_m;E_R)dE_m$$

Συνήθως καλούμε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας **συνάρτηση διακριτικής ικανότητας της μετρητικής διάταξης**.

Η συνάρτηση g(E_m;E_R) εξαρτάται αποκλειστικά από τη μετρητική διάταξη και είναι ανεξάρτητη του μηχανισμού παραγωγής των ηλεκτρονίων.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(E_m;E_R)dE_m=1 \quad \forall E_R$$

Παράδειγμα, η διακριτική ικανότητα μπορεί να είναι συνάρτηση της διαφοράς ΔE μεταξύ της αληθούς τιμής και του αποτελέσματος της μέτρησης, όπως εκφράζει η ακόλουθη σχέση:

$$g(E_m;E_R) = g(\Delta E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(E_m;E_R)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\Delta E)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma \equiv \sigma(E_R) = \frac{\alpha}{\sqrt{E_R}} + \beta$$

Η πιθανότητα να βρίσκεται το αποτέλεσμα της μέτρησης στο διάστημα τιμών [E_m, E_m+dE_m], δεδομένου ότι η αληθής τιμή της ενέργειας εμπεριέχεται στο διάστημα τιμών [E_R, E_R+dE_R] είναι:

$$P(E_m|E_R) \cdot P(E_R)=g(E_m;E_R) \cdot f(E_R) \cdot dE_R \cdot dE_m$$

ανεξάρτητα της αληθούς τιμής της ενέργειας του ηλεκτρονίου

$$P(E_m)=\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(E_m;E_R) \cdot f(E_R) \cdot dE_R\right] dE_m$$

η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μέτρησης

$$q(E_m)=\int_{-\infty}^{\infty} g(E_m;E_R) \cdot f(E_R) dE_R$$

Αποδοχή και Αποδοτικότητα της Μετρητικής Διάταξης

- Έστω ότι οι φυσικές ποσότητες $\{t, x_1, x_2, \dots, x_k\}$ χαρακτηρίζουν το αποτέλεσμα κάποιας φυσικής διεργασίας (γεγονός) την οποία μελετούμε πειραματικά. Έστω η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αληθών τιμών των φυσικών ποσοτήτων $g(t, x_1, x_2, \dots, x_k)$.
- Έστω, η συνάρτηση $\varepsilon(t, x_1, x_2, \dots, x_k)$, που εκφράζει την αποδοτικότητα της μετρητικής διάταξης, δηλαδή την πιθανότητα να ανιχνεύσει ένα γεγονός που χαρακτηρίζεται από τις φυσικές ποσότητες $\{t, x_1, x_2, \dots, x_k\}$
- Ανεξάρτητα εάν μετράμε μόνο την ποσότητα t (π.χ. μόνο την συνιστώσα της ορμής στον άξονα z) ή όλες τις φυσικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν το γεγονός, η αποδοτικότητα ανίχνευσης της συσκευής είναι (εν γένει) συνάρτηση όλων των φυσικών μεταβλητών.

Στην γενική περίπτωση, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποτελεσμάτων της μέτρησης της μεταβλητής t θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$f(t^m) = \frac{\int_{\Omega_{t^R}} \left[\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_k} R(t^m; t^R, x_1^R, x_2^R, \dots, x_k^R) \cdot g(t^R, x_1^R, x_2^R, \dots, x_k^R) \cdot \varepsilon(t^R, x_1^R, x_2^R, \dots, x_k^R) \cdot dx_1^R \cdot dx_2^R, \dots, dx_k^R \right] dt^R}{\underbrace{\int_{\Omega_{t^R}} \left[\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_k} g(t^R, x_1^R, x_2^R, \dots, x_k^R) \cdot \varepsilon(t^R, x_1^R, x_2^R, \dots, x_k^R) \cdot dx_1^R \cdot dx_2^R, \dots, dx_k^R \right] dt^R}_{\text{Επανακανονικοποίηση λόγω απώλειας γεγονότων}}}$$

Επανακανονικοποίηση λόγω απώλειας γεγονότων

Ολοκλήρωση Monte Carlo

$$I = \int_a^b y(x) \cdot dx$$

$$\hat{I} = \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{i=1}^N y(x_i)$$

όπου x_i ($i=1, 2, \dots, N$) είναι N τιμές της μεταβλητής x ισοπίθανα επιλεγμένες στο διάστημα $[a,b]$.

Για πεπερασμένο, αλλά μεγάλο, αριθμό όρων, N , η εκτίμηση συμπεριφέρεται ως τυχαία μεταβλητή με κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$g(\hat{I}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_i} \cdot e^{-\frac{(I-\hat{I})^2}{2 \cdot \sigma_i^2}}$$

$$\sigma_i = (b-a) \cdot \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{N}}$$

Ακρίβεια ολοκλήρωσης

$$\bar{y} = \int_a^b y(x) \frac{1}{b-a} dx = \frac{I}{b-a}$$

$$\sigma_y^2 = \int_a^b (\bar{y} - y(x))^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (y(x) - \frac{I}{b-a})^2 \cdot dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (y(x))^2 \cdot dx - \frac{I^2}{(b-a)^2}$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = (b-a)^2 \frac{1}{N} \cdot \left[\langle y^2(x) \rangle - (\langle y(x) \rangle)^2 \right]$$

Εκτίμηση σφάλματος ολοκλήρωσης

$$= (b-a)^2 \frac{1}{N} \cdot \left[\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N y^2(x) - \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N y(x_i) \right)^2 \right]$$

Απλή μέθοδος ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση Monte Carlo με τη Μέθοδο «Επιτυχίας-Απώλειας»

1) Έστω $\{x_i, z_i\}$, $i=1, 2, 3, \dots, N$ ζεύγη ανεξάρτητων τυχαίων αριθμών επιλεγμένων ομοιόμορφα στα διαστήματα $[a, b]$ και $[\kappa, \lambda]$ αντίστοιχα

$$x_i = [a, b]$$

$$z_i = [\kappa, \lambda]$$

$$\text{επιτυχία} \equiv z_i \leq y(x_i)$$

$$\text{απώλεια} \equiv z_i \geq y(x_i)$$

2) Ορίζουμε ως επιτυχία ή απώλεια τις περιπτώσεις κατά τις οποίες

3) Έστω μετά από N δοκιμές (N επιλογές ζευγών $\{x_i, z_i\}$) είχαμε n επιτυχίες και $(N-n)$ απώλειες

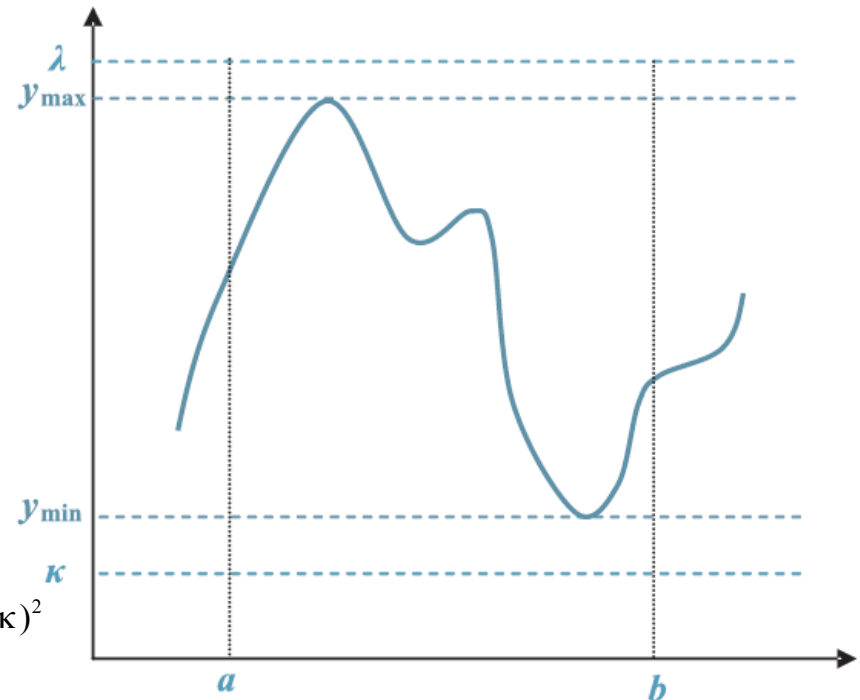
$$\hat{I} = \frac{n}{N} \cdot (b-a) \cdot (\lambda - \kappa) + \kappa \cdot (b-a)$$

$$V[\hat{I}] = \frac{V[n]}{N^2} \cdot (b-a)^2 \cdot (\lambda - \kappa)^2$$

$$V[n] = Np(1-p) = N \frac{(I - (b-a) \cdot \kappa)}{(b-a) \cdot (\lambda - \kappa)} \cdot \frac{((b-a) \cdot \lambda - I)}{(b-a) \cdot (\lambda - \kappa)}$$

$$V[\hat{I}] = \frac{1}{N} (I - (b-a) \cdot \kappa) \cdot ((b-a) \cdot \lambda - I)$$

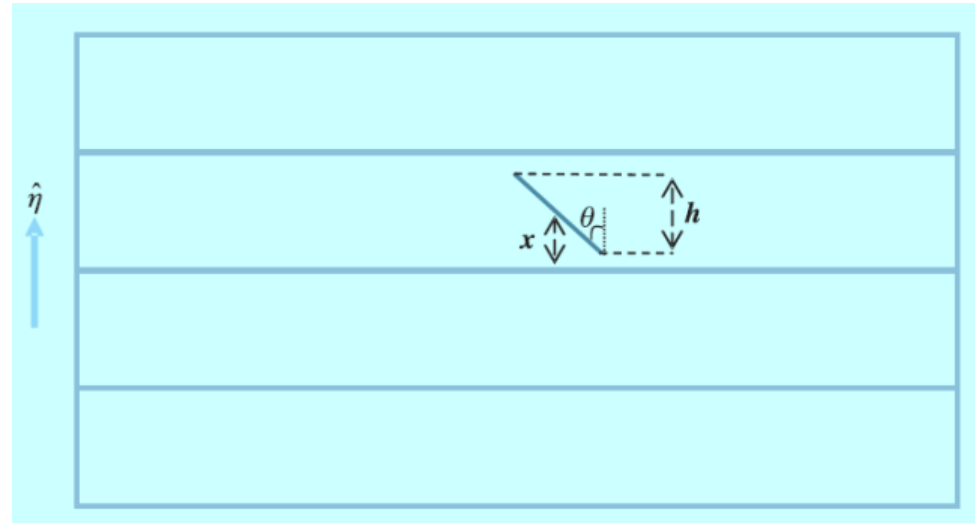
$$\hat{V}[\hat{I}] = \frac{n}{N^2} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) \cdot (b-a)^2 \cdot (\lambda - \kappa)^2 = \frac{n}{N^3} \cdot (N-n) \cdot (b-a)^2 \cdot (\lambda - \kappa)^2$$



Η Βελόνα του Buffon

Η απόσταση του μέσου της βελόνας από την πλησιέστερη γραμμή, x , και η γωνία που σχηματίζει η βελόνα με την κάθετο προς τις παράλληλες γραμμές, θ , κατανέμονται με ίσες πιθανότητες στα διαστήματα $[0, d/2]$ και $[0, \pi/2]$ αντίστοιχα

$$g(x) = \frac{2}{d}, \quad w(\theta) = \frac{2}{\pi}$$



Επιτυχία θεωρείται το γεγονός εκείνο κατά το οποίο η βελόνα τέμνει μία από τις παράλληλες ευθείες γραμμές.

$$f(\text{success} \mid \theta = \theta_0) = \frac{h(\theta_0)}{d} = \frac{d \cdot \cos \theta_0}{d} = \cos \theta_0$$

Η πιθανότητα επιτυχίας για οποιαδήποτε τιμή της γωνίας θ δίνεται από:

$$P = \int_0^{\pi/2} f(\text{success} \mid \theta) \cdot w(\theta) \cdot d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \frac{2}{\pi}$$

Εάν κατά την εκτέλεση N δοκιμών σημειώθηκαν n επιτυχίες τότε η πιθανότητα επιτυχίας εκτιμάται ως:

$$\hat{P} = \frac{n}{N}$$

$$\hat{\pi} = \frac{2 \cdot N}{n}$$

Σύγκριση Μεθόδων

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot d\theta = 1$$

$$\sigma_{\hat{I}} = (b - a) \cdot \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{N}}$$

Απλή Μέθοδος M.C. Ολοκλήρωσης:

$$\sqrt{V(\hat{I})} = \frac{0.308}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_y = \frac{1}{b - a} \int_a^b \left(y(x) - \frac{I}{b - a} \right)^2 \cdot dx = \frac{1}{b - a} \int_a^b (y(x))^2 \cdot dx - \frac{I^2}{(b - a)^2}$$

Ολοκλήρωση Monte Carlo με τη Μέθοδο «Επιτυχίας-Απώλειας»: $V[\hat{I}] = \frac{1}{N} \left(I - (b - a) \cdot \kappa \right) \cdot \left((b - a) \cdot \lambda - I \right)$

$$\sqrt{V(\hat{I})} = \frac{0.756}{\sqrt{N}}$$

Αναζήτηση Τεχνικών Μεγιστοποίησης της Ακρίβειας της Ολοκλήρωσης Monte Carlo

Μέθοδος ιεραρχημένης δειγματοληψίας

$$I = \int_a^b y(x) \cdot dx$$

$$g(x) > 0 \forall x \in [a, b]$$

$$\mathfrak{R} = \int_a^b g(x) dx$$

$$I = \int_a^b \frac{y(x)}{\left[\frac{1}{\mathfrak{R}} \cdot g(x)\right]} \cdot \left[\frac{1}{\mathfrak{R}} \cdot g(x)\right] \cdot dx$$

$$Q(x) = \frac{y(x)}{\left[\frac{1}{\mathfrak{R}} \cdot g(x)\right]}$$

$$P(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\mathfrak{R}}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

$$\hat{I} = \frac{\mathfrak{R}}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{y(x_i)}{g(x_i)}$$

$$V[\hat{I}] = \frac{\mathfrak{R}^2}{N} \cdot V\left[\frac{y(x)}{g(x)}\right]$$

$$I = \int_a^b \frac{y(x)}{\left[\frac{1}{\mathfrak{R}} \cdot g(x)\right]} \cdot P(x) \cdot dx = E\left[\frac{y(x)}{\left[\frac{1}{\mathfrak{R}} \cdot g(x)\right]}\right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{R}}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{y(x_i)}{g(x_i)}$$

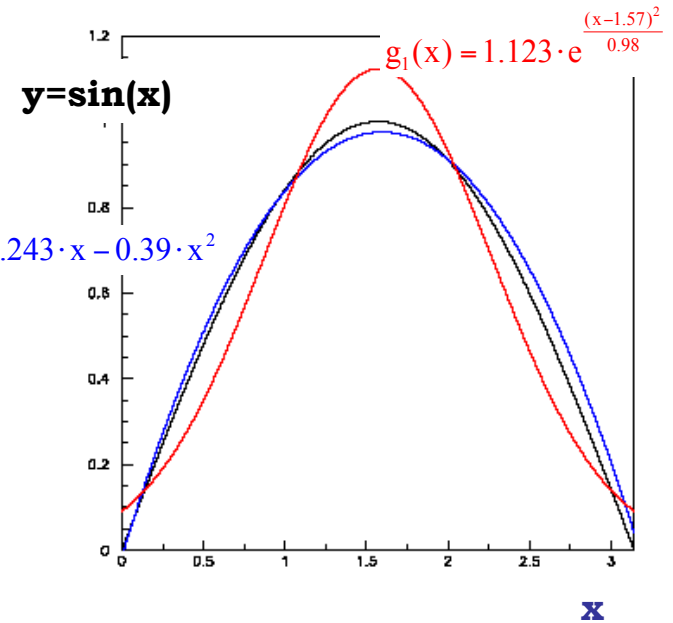
όπου οι τιμές x_i ($i=1, 2, 3, \dots, N$) της μεταβλητής x έχουν επιλεγεί σύμφωνα με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $P(x)$.

$$\frac{y(x)}{g(x)} \approx 1 \Rightarrow V\left[\frac{y(x)}{g(x)}\right] \rightarrow 0$$

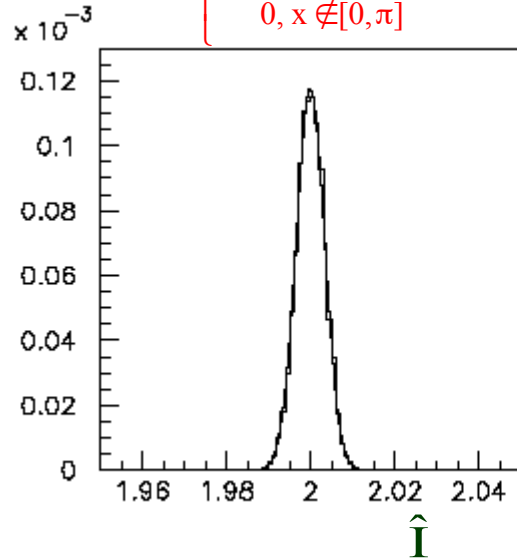
$$I = \int_0^{\pi} \sin x \cdot dx$$

$$\hat{I} = \frac{\Re}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{y(x_i)}{g(x_i)} \quad P(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\Re}, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

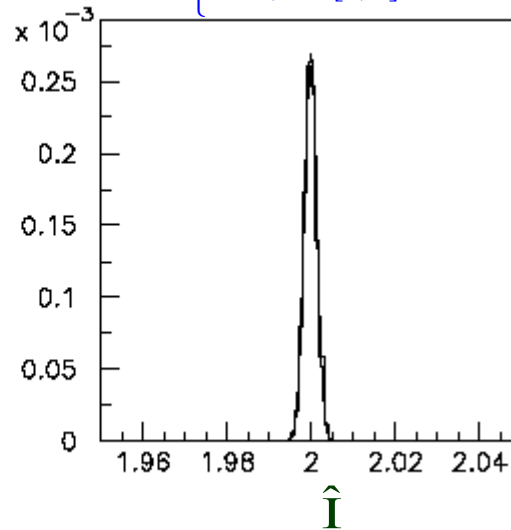
$$g_2(x) = -0.015 + 1.243 \cdot x - 0.39 \cdot x^2$$



$$P_1(x) = \begin{cases} \frac{g_1(x)}{\Re}, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \notin [0, \pi] \end{cases}$$



$$P_2(x) = \begin{cases} \frac{g_2(x)}{\Re}, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \notin [0, \pi] \end{cases}$$



. Τα ιστογράμματα παριστούν την πυκνότητα πιθανότητας των εκτιμήσεων, ενώ οι συνεχείς γραμμές παριστούν γραφικά κανονικές συναρτήσεις με μέσες τιμές ίσες με την πραγματική τιμή του ολοκληρώματος και διασπορά σύμφωνα με τις προβλέψεις της μεθόδου ολοκλήρωσης.

Επιλογή Τυχαίων Αριθμών

$$x_i = R[a, b]$$

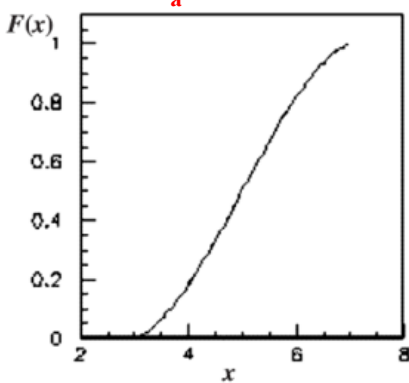
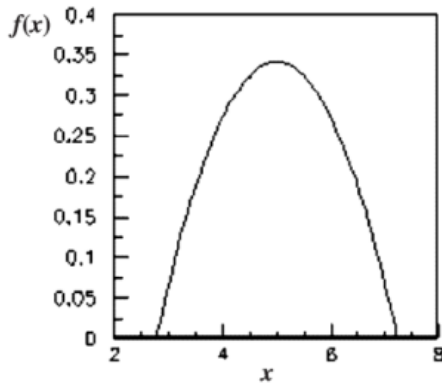
$$z_i = R[0, \lambda]$$

Συλλέγουμε ως τιμές της μεταβλητής x τους n τυχαίους αριθμούς x_i για τους οποίους ισχύει ότι:

$$z_i \leq f(x_i)$$

Μέθοδος Αντίστροφου Μετασχηματισμού

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$



$$f(x) = \frac{1}{14.67} \cdot (-x^2 + 10 \cdot x - 20)$$

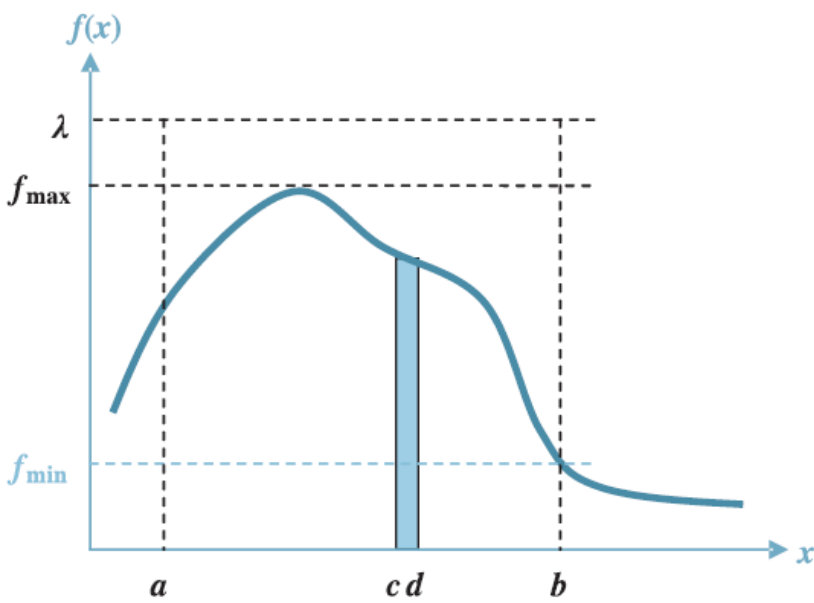
$$F(x) = \frac{1}{14.67} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot (x^3 - 27) + 5 \cdot (x^2 - 9) - 20 \cdot (x - 3) \right]$$

Επιλέγονται ομοιόμορφα τιμές για τη μεταβλητή $u=F(x)$ από το διάστημα τιμών $[0,1]$

$$u_i = R[0,1]$$

$$x_i = F^{-1}(u_i)$$

Μέθοδος της Απόρριψης



Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ σύμφωνα με την οποία επιθυμούμε να επιλέξουμε τιμές για την τυχαία μεταβλητή x στο διάστημα $[a,b]$.