

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.**

### **Μετρήσεις, Σφάλματα και Στατιστικά Μεγέθη**

## 2.1 Εισαγωγή

Ασχοληθήκαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο με τον ορισμό μαθηματικών εργαλείων για την περιγραφή της πιθανότητας ή της πυκνότητας πιθανότητας ώστε μία τυχαία μεταβλητή να πάρει τιμές από κάποια περιοχή του πεδίου ορισμού της. Ο στόχος μας είναι να χρησιμοποιήσουμε αυτά τα εργαλεία στην επεξεργασία μετρήσεων και στην εξαγωγή συμπερασμάτων.

Ας επανέλθουμε στο παράδειγμα της υποενότητας ..... Εάν είχαμε την δυνατότητα να εκτελέσουμε μία σειρά άπειρων μετρήσεων θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε την κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ποσοτικών εκτιμήσεων (μετρήσεων) της πίεσης και της θερμοκρασίας. Ακόμα όμως και στην περίπτωση που η πίεση και η θερμοκρασία του αερίου παραμένουν πράγματι σταθερές και οι διακυμάνσεις των μετρήσεων οφείλονται αποκλειστικά σε εξωγενείς παράγοντες (ατέλεια οργάνων, εξωτερικοί παράγοντες κτλ), θα πρέπει να αναζητήσουμε κάποιο τρόπο για να εκτιμήσουμε τις «αληθείς» τιμές αυτών των φυσικών ποσοτήτων. Θα πρέπει επίσης να βρούμε κάποιο τρόπο για να ποσοτικοποιήσουμε την ακρίβεια με την οποία εκτιμούμε τις «αληθείς» τιμές των φυσικών ποσοτήτων.

Πολλω δε μάλλον όταν, πρακτικά, είναι αδύνατον να εκτελέσουμε άπειρο αριθμό μετρήσεων. Θα πρέπει να αναζητήσουμε ένα τρόπο ώστε η ποσοτικοποίηση της ακρίβειας εκτίμησης των «αληθών» τιμών να εκφράζεται συναρτήσει του πλήθους των διαθέσιμων μετρήσεων.

## 2.2 Ο νόμος των μεγάλων αριθμών

Εστω ότι  $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$  είναι ένα σύνολο **αμοιβαία ανεξάρτητων** τυχαίων μεταβλητών, η κάθε μία με αναμενόμενη τιμή ίση με  $\mu$  (κοινή για όλες τις τυχαίες μεταβλητές) και διασπορές ίσες με  $\sigma^2_i$  όπου  $i=1,2,\dots,N$  αντίστοιχα..

Ως μέσο όρο των τυχαίων αυτών μεταβλητών ορίζουμε την ποσότητα:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad 2.2.1$$

Προφανώς η ποσότητα  $\bar{X}$  που ορίστηκε με την σχέση 2.2.1 είναι γραμμική συνάρτηση τυχαίων μεταβλητών και συνεπώς είναι τυχαία μεταβλητή.

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη<sup>1</sup> τις δύο εκφράσεις του νόμου των μεγάλων αριθμών:

---

<sup>1</sup> Συνήθως οι Φυσικοί αισθάνονται ότι καταλαβαίνουν απόλυτα την έννοια της σύγκλισης και των διαδικασιών που εμπλέκουν όρια διότι είναι εξοικιωμένοι με τις αντίστοιχες έννοιες του Διαφορικού Λογισμού και των εφαρμογών του στη μελέτη φυσικών φαινομένων. Εν τούτοις στην Στατιστική η έννοια της σύγκλισης είναι περισσότερο πολύπλοκη εκ του γεγονότος ότι μπορεί να οριστεί μόνο πιθανοκρατικά η τιμή της τυχαίας μεταβλητής. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης μπορεί να

**Ο ΑΣΘΕΝΗΣ ΝΟΜΟΣ** των μεγάλων αριθμών διατείνεται ότι αν

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \right] = 0 \quad 2.2.2$$

τότε ο μέσος όρος  $\bar{X}$  συγκλίνει<sup>2</sup> στην αναμενόμενη τιμή,  $\mu$ , των τυχαίων μεταβλητών.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right) = \mu \quad 2.2.3$$

**Ο ΙΣΧΥΡΟΣ ΝΟΜΟΣ** των μεγάλων αριθμών διατείνεται ότι αν

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{\sigma_i^2}{i} \right) \right] = \text{πεπερασμένο} \quad 2.2.4$$

τότε ο μέσος όρος  $\bar{X}$  συγκλίνει<sup>3</sup> στην αναμενόμενη τιμή,  $\mu$ , των τυχαίων μεταβλητών.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right) = \mu \quad 2.2.4$$

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών έχει ιδιαίτερη πρακτική σημασία όταν οι τυχαίες μεταβλητές  $X_i$  ( $i=1,2,3,\dots,N$ ) είναι τα αποτελέσματα του ιδίου πειράματος (ή μέτρησης της φυσικής ποσότητας  $X$ ) που επαναλαμβάνεται  $N$  φορές. Σ' αυτή την περίπτωση οι τυχαίες μεταβλητές είναι αμοιβαία ανεξάρτητες έχουν την ίδια διασπορά,  $\sigma_i^2 = \sigma^2$  ( $i=1,2,3,\dots,N$ ) και εξασφαλίζεται η συνθήκη 2.2.2 (ή αντίστοιχα η 2.2.4). Συνεπώς αναμενόμενη τιμή της ποσότητας  $X$ ,  $\mu_X$ , υπολογίζεται ως το όριο, όταν το  $N$  τείνει στο άπειρο, του μέσου όρου των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων.

Βεβαίως, η απαίτηση ώστε ο αριθμός των μετρήσεων να τείνει στο άπειρο δεν είναι πρακτικά εφικτή. Στις πρακτικές εφαρμογές η σχέση 2.2.4 χρησιμοποιείται προσεγγιστικά ως:

$$\bar{X} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right) \cong \mu_X \quad 2.2.5$$

Εάν δηλαδή επαναλάβουμε την μέτρηση της ποσότητας  $X$ ,  $N$  φορές (όπου το  $N$  είναι ένας πεπερασμένος αριθμός) μπορούμε, με την σχέση 2.2.5, **να υπολογίσουμε**

---

προστρέξει στο βιβλίο των W. T. Eadie et al "Statistical Methods in Experimental Physics", North-Holland Publishing Company, 1971 και σε αναφορές εκεί.

<sup>2</sup> Η σύγκλιση αυτή χαρακτηρίζεται ως «σύγκλιση τετραγωνικού μέσου» (quadratic mean).

<sup>3</sup> Η σύγκλιση αυτή χαρακτηρίζεται ως «περίπου βέβαια σύγκλιση» (almost certain convergence).

**προσεγγιστικά** την τιμή της αναμενόμενης τιμής της ποσότητας  $X$ , χωρίς να ξέρουμε τίποτα περισσότερο για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας<sup>4</sup>.

Παρατηρήσετε ότι η σχέση 2.2.5 δεν αποτελεί μόνο προσέγγιση αλλά περιέχει και την ακόλουθη παραδοξότητα. Το δεξιό μέλος της ισότητας είναι πραγματικός αριθμός ενώ το αριστερό μέλος είναι τυχαία μεταβλητή<sup>5</sup>. Είναι πιο σωστό λοιπόν να γράψουμε ότι:

$$\bar{X} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right) = \hat{\mu}_X \text{ όπου } \hat{\mu}_X \text{ είναι η εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής } \mu_X \quad 2.2.6$$

**Ερώτηση:** Δείξτε ότι η αναμενόμενη τιμή και διασπορά της τυχαίας μεταβλητής  $\hat{\mu}_X$ , που ορίσαμε με την σχέση 2.2.6, εκφράζονται συναρτήσει της αναμενόμενης τιμής και της διασποράς των μετρήσεων της ποσότητας  $X$ ,  $\mu_X$  και  $\sigma$  αντίστοιχα, και του αριθμού των μετρήσεων,  $N$ , ως:

$$\begin{aligned} \langle \bar{X} \rangle &= \langle \hat{\mu}_X \rangle = \mu_X \\ V(\bar{X}) &= V(\hat{\mu}_X) = \frac{\sigma^2}{N} \end{aligned} \quad 2.2.7$$

**Υπόδειξη:** Η τυχαία μεταβλητή  $\hat{\mu}_X$  είναι γραμμική συνάρτηση των  $N$  τυχαίων μεταβλητών  $X_i$  ( $i=1,2,3,\dots,N$ ). Εφαρμόσετε τις σχέσεις 1.12.3 και 1.12.11 του Κεφαλαίου 1.

Όταν ο αριθμός των μετρήσεων,  $N$ , τείνει στο άπειρο η διασπορά της εκτίμησης της αναμενόμενης τιμής, σχέση 2.2.7, τείνει στο μηδέν. Με άλλα λόγια η εκτίμηση της μέσης τιμής παύει να είναι τυχαία μεταβλητή, είναι πλέον ένας πραγματικός αριθμός, όπως ακριβώς προβλέπει ο νόμος των μεγάλων αριθμών, 2.2.3.

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών εύκολα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της διασποράς των μετρήσεων.

Παρατηρήστε ότι η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητή,  $Y=(X-\mu_X)^2$  (όπου  $X$  είναι η μέτρηση μίας φυσικής ποσότητας και  $\mu_X$  η αναμενόμενη τιμή αυτών των μετρήσεων) είναι η διασπορά,  $\sigma$ , των μετρήσεων. Εφαρμόζοντας κανείς τον νόμο των μεγάλων αριθμών<sup>6</sup> καταλήγει ότι:

<sup>4</sup> Πράγματι εάν η διασπορά,  $\sigma^2$ , υπάρχει και είναι πεπερασμένη, η συνθήκη 2.2.2 ικανοποιείται.

<sup>5</sup> Πράγματι, εάν εκτελέσουμε την σειρά των  $N$  μετρήσεων της ποσότητας  $X$ , πολλές φορές και κάθε φορά υπολογίζουμε τον μέσο όρο των αντιστοίχων  $N$  μετρήσεων, δεν θα πρέπει να εκπλαγούμε όταν θα παρατηρήσουμε (βλέπε παράδειγμα 2.1.1) τις τιμές των μέσων όρων να διακυμαίνονται

<sup>6</sup> Με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι αλγεβρικές ροπές μέχρι και τετάρτης τάξης.

$$\underbrace{\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu_X)^2 \right)}_{\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i)^2 \right) - \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N (X_i) \mu_X \right) + \mu_X^2} = \sigma^2 \quad \text{ή} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i)^2 \right) - \mu_X^2 = \sigma^2 \quad 2.2.8$$

Η σχέση 2.2.8 μπορεί να εφαρμοσθεί προσεγγιστικά για την περίπτωση πεπερασμένου πλήθους μετρήσεων (κατ' αναλογία της σχέσης 2.2.6) ως:

$$\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu_X)^2 \right) = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i)^2 \right) - \mu_X^2 = \hat{\sigma}^2 \quad 2.2.9$$

όπου  $\hat{\sigma}^2$  είναι η εκτίμηση της διασποράς των μετρήσεων και  $\mu_X$  είναι η αναμενόμενη τιμή των μετρήσεων.

Στην περίπτωση όπου κάποιος έχει διαθέσιμες  $N$  μετρήσεις του μεγέθους  $X$ , συχνά βρίσκεται στον πειρασμό **να εκτιμήσει συγχρόνως την αναμενόμενη τιμή και την διασπορά των μετρήσεων** χρησιμοποιώντας την σχέση 2.2.6 και 2.2.10 αντίστοιχα:

$$\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{\mu}_X)^2 \right) = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i)^2 \right) - \hat{\mu}_X^2 = \hat{\sigma}^2 \quad 2.2.10\alpha$$

Η σχέση 2.2.10 προκύπτει από την 2.2.9, όπου έχει αντικατασταθεί η αναμενόμενη τιμή της μέτρησης του  $X$ ,  $\mu_X$ , με την εκτίμηση της από την σχέση 2.2.6. Η αντικατάσταση αυτή αποτελεί κλασσικό παράδειγμα όπου **η διαισθητική λύση καταλήγει σε λάθος αποτέλεσμα**. Όπως θα συζητήσουμε σε επόμενο κεφάλαιο η **σχέση 2.2.10 οδηγεί σε λάθος εκτίμηση (bias) της διασποράς**<sup>7</sup> ενώ η σχέση 2.2.6 συνεχίζει να αποτελεί καλή εκτίμηση.

### Παράδειγμα 2.1.1

Ας επιχειρήσουμε με ένα απλό πείραμα για να δείξουμε την ισχύ των προσεγγιστικών εφαρμογών του νόμου των μεγάλων αριθμών. Ας υποθέσουμε ότι «στρίβουμε» συγχρόνως τέσσερα ίδια νομίσματα. Ανάλογα με το αποτέλεσμα μπορούμε να δίνουμε τιμές (0 ή 1) στην ακόλουθη μεταβλητή ( $A$ ).

#### μεταβλητή $A$

- 1 : όταν ένα μόνο (οποιοδήποτε) νόμισμα φέρνει κεφάλι
- 0 : σε κάθε άλλη περίπτωση

<sup>7</sup>Η σωστή σχέση εκτίμησης είναι:  $\left( \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{\mu}_X)^2 \right) = \frac{N}{N-1} \left( \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i)^2 \right) - \hat{\mu}_X^2 \right) = \hat{\sigma}^2 \quad 2.2.10\beta$

Όπως θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $A$ , είναι διωνυμική. Στο σημείο αυτό αρκεί η διαπίστωση ότι για την τυχαία μεταβλητή  $A$  υπάρχουν η αναμενόμενη τιμή και η τετραγωνική απόκλιση. Έστω λοιπόν ότι η μεταβλητή  $A$  έχει αναμενόμενη τιμή ίση με  $\mu_A$  και τετραγωνική απόκλιση ίση με  $\sigma_A^2$ .

Ας επαναλάβουμε το πείραμα (τη ρίψη των νομισμάτων)  $N$  φορές και έστω  $A_i$  ( $i=1,2,3,\dots,N$ ) οι τιμές της μεταβλητής  $A$  που παρατηρήθηκαν σ' αυτά τα πειράματα.. Είναι προφανές ότι κάθε ένα από τα αποτελέσματα  $A_i$  (π.χ.  $A_{12}$ ) είναι τυχαία μεταβλητή<sup>8</sup>.

Ο μέσος όρος των  $N$  τιμών  $A_i$ ,  $\bar{A}$ , σύμφωνα με την 2.2.1 είναι:

$$\bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i \quad 2.2.11$$

Η διασπορά των  $A_i$ ,  $\sigma_A^2$ , είναι πεπερασμένος αριθμός, και η συνθήκη 2.2.2. ικανοποιείται. Πράγματι:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_A^2 \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{N \cdot \sigma_A^2}{N^2} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sigma_A^2}{N} \right] = 0$$

Συνεπώς, βάσει της 2.2.3, θα ισχύει ότι:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\bar{A}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i \right) = \mu_A \quad 2.2.12$$

Όταν το  $N$  γίνεται πολύ μεγάλο, αλλά όχι άπειρο, θα ισχύει η προσέγγιση:

$$\bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i \cong \hat{\mu}_A \quad 2.2.13$$

Σύμφωνα με την συζήτηση που προηγήθηκε, η ποσότητα  $\hat{\mu}_A$ , είναι τυχαία μεταβλητή με διασπορά που δίνεται από την σχέση 2.2.7. Όταν το  $N$  τείνει στο άπειρο η ποσότητα αυτή θα πρέπει να ταυτίζεται με τη αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής  $A$ .

<sup>8</sup> Πράγματι μπορούμε να εκτελέσουμε την σειρά των  $N$  ρίψεων πολλές φορές. Το αποτέλεσμα της 12<sup>ης</sup> ρίψης ( $A_{12}$ ) θα είναι διαφορετικό σε κάθε σειρά ρίψεων. Επίσης η αναμενόμενη τιμή της 12<sup>ης</sup> ρίψης θα είναι και αυτή ίση με  $\mu_A$  (δεν υπάρχει τίποτα που να διαφοροποιεί την 12<sup>η</sup> ρίψη από τις άλλες) και η διασπορά ίση με  $\sigma_A^2$ . Το ίδιο θα ισχύει για οποιαδήποτε από τις άλλες ρίψεις.

Αν και δεν ξέρουμε<sup>9</sup> την ακριβή μαθηματική έκφραση της συνάρτησης πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $A$ , χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε νόμισμα έχει 50% πιθανότητα να έρθει κεφάλι, είναι εύκολο να προβλέψουμε θεωρητικά την αναμενόμενη τιμή της με τον ακόλουθο τρόπο:

Η πιθανότητα το πρώτο νόμισμα να έρθει κεφάλι και τα άλλα νομίσματα να έρθουν γράμματα είναι:  $0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.0625$ .

Την ίδια όμως πιθανότητα έχουν και οι ακόλουθοι συνδυασμοί: το δεύτερο κεφάλι και τα άλλα γράμματα, το τρίτο κεφάλι και τα άλλα γράμματα, το τέταρτο κεφάλι και τα άλλα γράμματα. Προφανώς όλοι αυτοί οι συνδυασμοί ανήκουν στην κατηγορία «ένα μόνο νόμισμα έρχεται κεφάλι». Συνεπώς η πιθανότητα να έρθει ένα μόνο (οποιοδήποτε) νόμισμα από τα τέσσερα κεφάλι είναι  $P(A=1) = 4 \times 0.0625 = 0.25$ .

Είναι προφανές ότι  $P(A=0) = 1 - P(A=1) = 1 - 0.25 = 0.75$ .

Επιπλέον, επειδή η μεταβλητή  $A$  παίρνει δύο μόνο τιμές (1 ή 0) η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά θα είναι (σύμφωνα με τους ορισμούς, σχέσεις: 1.8.9)

$$\mu_A = 0.25 \cdot 1 + 0.75 \cdot 0 = 0.25 \quad \text{και} \quad \sigma_A^2 = (1 - 0.25)^2 \cdot 0.25 + (0 - 0.25)^2 \cdot 0.75 = 0.1875$$

Πρόθεσή μας είναι να εκτελέσουμε το πείραμα της ρίψης των τεσσάρων νομισμάτων και να προσδιορίζουμε μετά από κάθε ρίψη την τιμή της μεταβλητής  $A$ . Μετά από  $N$  ρίψεις θα υπολογίζουμε την ποσότητα  $\hat{\mu}_A$ , χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.2.13. Προκειμένου να μελετήσουμε την στατιστική συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής  $\hat{\mu}_A$ , εκτελούμε πολλές σειρές από  $N$  ρίψεις.

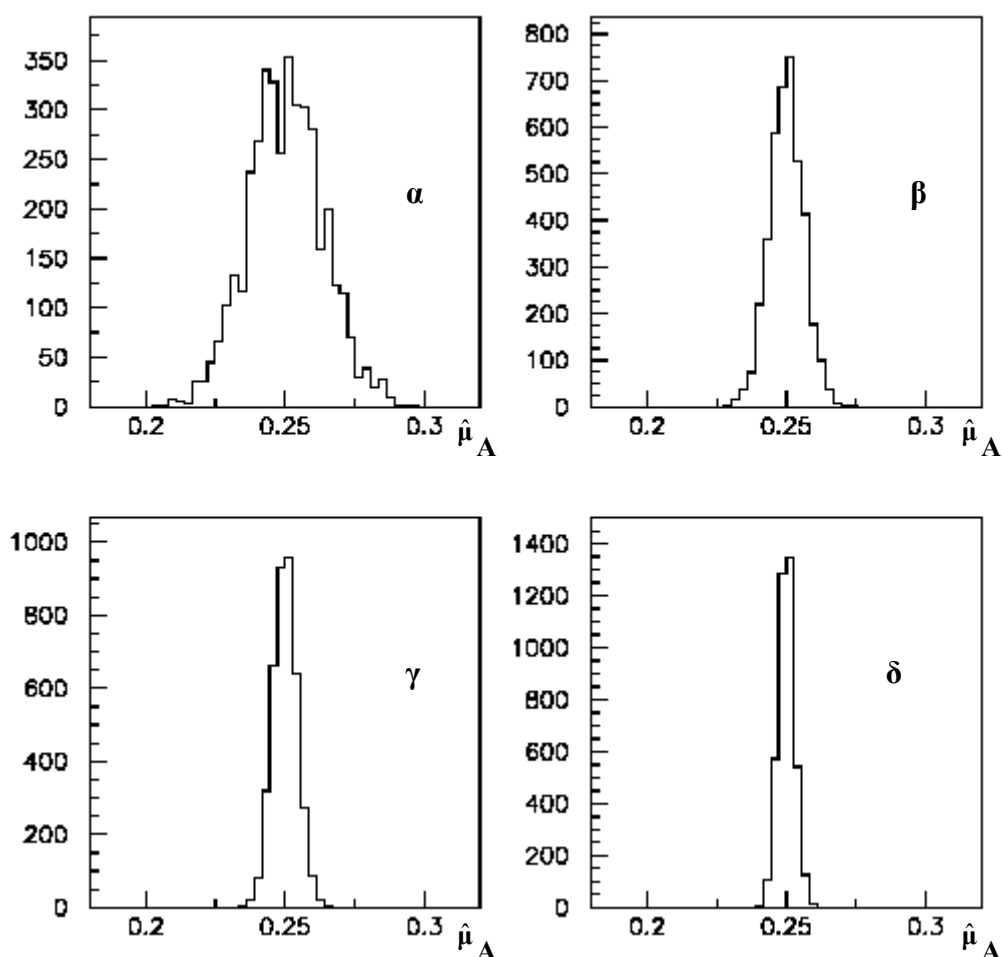
Στο Σχήμα 2.2.1 (α έως δ) παρίστανται, με την μορφή ιστογράμματος, τα αποτελέσματα των πειραματισμών<sup>10</sup> (για  $N=1000, 5000, 10000$  και  $20000$  αντίστοιχα). Επί παραδείγματι, το ιστόγραμμα του Σχήματος 2.2.1.α παριστά 4000 εκτιμήσεις της αναμενόμενης τιμής της μεταβλητής  $A$ , όπως αυτή υπολογίσθηκε από  $N=1000$  ρίψεις των τεσσάρων νομισμάτων<sup>11</sup>.

Είναι σαφές από τα αποτελέσματα των πειραματισμών μας ο στατιστικός χαρακτήρας της εκτίμησης  $\hat{\mu}_A$ , (ότι δηλαδή είναι τυχαία μεταβλητή). Κάθε μία από τις εκτιμήσεις της αναμενόμενης τιμής της μεταβλητής  $A$  καταλήγει σε διαφορετική τιμή. Είναι όμως εμφανές ότι, ανεξάρτητα με πόσες ρίψεις ( $N$ ) χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε την ποσότητα  $\hat{\mu}_A$ , οι εκτιμήσεις κυμαίνονται περίπου συμμετρικά γύρω από την αναμενόμενη τιμή,  $\mu_A = 0.25$ .

<sup>9</sup> Η αλήθεια είναι ότι ξέρουμε, είναι η διωνυμική κατανομή που θα μελετήσουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

<sup>10</sup> Δεν πρόκειται για πραγματικούς πειραματισμούς αλλά για προσομοίωση πειραματισμών. Περί προσομοίωσης βλέπε στο Κεφάλαιο 4.

<sup>11</sup> Με άλλα λόγια, μετά από  $N=1000$  ρίψεις ( $A_i, i=1,2,3,\dots,1000$ ) υπολογίζεται η τιμή της μεταβλητής  $\hat{\mu}_A$ , με τη σχέση 2.2.14. Επαναλαμβάνουμε 4000 φορές το ίδιο πείραμα υπολογισμού της  $\hat{\mu}_A$ , και παριστάνουμε με μορφή ιστογράμματος τα αποτελέσματα αυτών των (4000) εκτιμήσεων.



Σχήμα 2.2.1: Αναπαράσταση, με μορφή ιστογράμματος, 4000 εκτιμήσεων της αναμενόμενης τιμής της μεταβλητής  $A$ . Για κάθε εκτίμηση τα νομίσματα ρίφθηκαν  $N$  φορές και χρησιμοποιήθηκε η σχέση 2.2.13.

**α:**  $N=1000$ , **β:**  $N=5000$ , **γ:**  $N=10000$  και **δ:**  $N=20000$

Είναι επίσης χαρακτηριστικό ότι οι εκτιμήσεις στις οποίες καταλήγουμε με τους πειραματισμούς πολλών ρίψεων (μεγάλο  $N$ , π.χ. βλέπε στο Σχήμα 2.2.1.δ) είναι περισσότερο συγκεντρωμένες γύρω από την κεντρική τιμή (0.25), όπως προβλέπει η σχέση 2.2.7.

Βεβαίως, η εκτίμηση  $\hat{\mu}_A$ , θα συμπίσει με την αναμενόμενη τιμή όταν ο αριθμός των ρίψεων γίνει άπειρος. Για κάθε άλλη περίπτωση, η εκτίμηση  $\hat{\mu}_A$ , θα κυμαίνεται γύρω από την αναμενόμενη τιμή με αναμενόμενη τιμή  $\langle \hat{\mu}_A \rangle$  και διασπορά σύμφωνα με την σχέση 2.2.7.

Σαν παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα των πειραματισμών του Σχήματος 2.2.1 για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή και την διασπορά της τυχαίας μεταβλητής  $\hat{\mu}_A$ , και στην συνέχεια να τη συγκρίνουμε με τις προβλέψεις της σχέσης 2.2.7.

**Ερώτηση:** Περιγράψετε την διαδικασία υπολογισμού της αναμενόμενης τιμής και της διασποράς της τυχαίας μεταβλητής  $\hat{\mu}_A$ , χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των πειραματισμών που παρίστανται στο Σχήμα 2.2.1.



**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήσετε την μεθοδολογία που αναπτύσσεται στην υποενότητα, 1.11. Εναλλακτικά χρησιμοποιείτε τον νόμο των μεγάλων αριθμών, όπως περιγράφεται σ' αυτή την υποενότητα.

**Πίνακας 2.2.1**

|         | $\langle \hat{\mu}_A \rangle$ | $\langle \hat{\mu}_A \rangle = \mu_A$<br>2.2.7 | $V(\hat{\mu}_A)$       | $V(\hat{\mu}_A) = \frac{\sigma_A^2}{N}$<br>2.2.7 |
|---------|-------------------------------|------------------------------------------------|------------------------|--------------------------------------------------|
| N=1000  | 0.250187                      | 0.25                                           | $18.169 \cdot 10^{-5}$ | $18.750 \cdot 10^{-5}$                           |
| N=5000  | 0.250116                      | 0.25                                           | $3.680 \cdot 10^{-5}$  | $3.75 \cdot 10^{-5}$                             |
| N=10000 | 0.250036                      | 0.25                                           | $1.813 \cdot 10^{-5}$  | $1.875 \cdot 10^{-5}$                            |
| N=20000 | 0.249998                      | 0.25                                           | $0.9210 \cdot 10^{-5}$ | $0.9375 \cdot 10^{-5}$                           |

Για τον υπολογισμό των τιμών της τελευταίας στήλης χρησιμοποιήσαμε την τιμή  $\sigma_A^2 = 0.1875$  στη σχέση 2.2.7.

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 2.2.1, οι «προβλέψεις» της σχέσης 2.2.7 περιγράφουν πλήρως την στατιστική συμπεριφορά της εκτίμησης της αναμενόμενης τιμής της μεταβλητής A.

## 2.3 Ολοκλήρωση Monte Carlo

Μία από τις πολλές εφαρμογές του νόμου των μεγάλων αριθμών αναφέρεται στον προσεγγιστικό υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$I = \int_a^b g(u) du \quad 2.3.1$$

Ας θεωρήσουμε ότι κάποια τυχαία μεταβλητή u, παίρνει τιμές σύμφωνα με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, f(u). Έστω g(u) μία συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής u. Εξ ορισμού, η αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης g(u), θα είναι:

$$E(g(u)) = \int_a^b g(u) \cdot f(u) du = \mu_g$$

$$\text{όπου } \int_a^b f(u) du = 1$$
2.3.2

Θα υποθέσουμε ακόμα ότι η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής  $g(u)$  υπάρχει:

$$V(g(u)) = E\left[(E(g(u)) - g(u))^2\right] = \text{πεπερασμένος αριθμός}$$
2.3.3

ώστε να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του νόμου των μεγάλων αριθμών,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{V(g(u_i))}{N^2} \rightarrow 0.$$

και κατά συνέπεια να ισχύει ότι:

$$\bar{g}(u) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(u_i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(u_i) = \mu_g$$
2.3.4

Εάν επιλέξουμε την  $f(u)$  να είναι η ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[a, b]$ , δηλαδή:

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq u \leq b \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$
2.3.5

η 2.3.2 γράφεται ως:

$$E(g) = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot g(u) du = \frac{\int_a^b g(u) du}{b-a} = \frac{I}{b-a}$$
2.3.6

όπου με  $I$  παραστήσαμε το ολοκλήρωμα της σχέσης 2.3.1.

Εφαρμόζοντας στην συνέχεια τον νόμο των μεγάλων αριθμών, το ολοκλήρωμα  $I$  υπολογίζεται ως:

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N g(u_i)$$
2.3.7

Σύμφωνα με τη συζήτηση της υποενότητας 2.2, η σχέση 2.3.7 μπορεί να εφαρμοστεί προσεγγιστικά, για πεπερασμένο  $N$ , ως:

$$I \cong \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N g(u_i) = \hat{I}$$
2.3.8

**Προκειμένου λοιπόν να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα 2.3.1,**

- επιλέγουμε ισοπίθανα  $N$  πραγματικούς αριθμούς  $u_i$  ( $i=1,2,3,\dots,N$ ) στο διάστημα ολοκλήρωσης,  $[a,b]$ ,
- υπολογίζουμε τις αντίστοιχες  $N$  τιμές της συνάρτησης,  $g(u_i)$  και
- εφαρμόζουμε την σχέση 2.3.8

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, η ποσότητα  $\hat{I}$  είναι τυχαία μεταβλητή με αναμενόμενη τιμή ίση με την πραγματική τιμή του ολοκληρώματος 2.3.1,  $I=E(g(u)) \cdot (b-a)$ , και διασπορά ίση με:

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{I}}^2 &= \frac{(b-a)^2}{N} \cdot V(g(u)) = \frac{(b-a)^2}{N} \cdot \int_a^b (E(g(u)) - g(u))^2 \cdot \frac{1}{b-a} du = \frac{1}{N} \cdot \int_a^b (I - g(u) \cdot (b-a))^2 \cdot \frac{1}{b-a} du = \\ &= \frac{1}{N} \cdot \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (I - g(u_j) \cdot (b-a))^2\end{aligned}\quad 2.3.9$$

Όπως επίσης θα δείξουμε στην επόμενη υποενότητα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $\hat{I}$  είναι η κανονική κατανομή.

Μπορούμε να εκφράσουμε ποσοτικά την ακρίβεια της προσέγγισης, όπως θα δείξουμε στα επόμενα, με την τετραγωνική ρίζα της διασποράς. Προκειμένου δε να υπολογίσουμε την διασπορά, σύμφωνα με τα επιχειρήματα που αναπτύξαμε στην υποενότητα 2.2, θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη προσεγγιστική έκφραση ( $M=N$ ):

$$\sigma_{\hat{I}}^2 \approx \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^M (\hat{I} - g(u_j) \cdot (b-a))^2 = (b-a)^2 \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^M (\bar{g}(u) - g(u_j))^2 = (b-a)^2 \frac{1}{N-1} \cdot \left[ \overline{g^2(u)} - (\overline{g(u)})^2 \right]$$

ή για  $N$  μεγάλο αριθμό ( $N-1 \approx N$ )

$$\sigma_{\hat{I}}^2 \approx (b-a)^2 \frac{1}{N} \cdot \left[ \overline{g^2(u)} - (\overline{g(u)})^2 \right] \quad 2.3.10$$

### Παράδειγμα 2.3.1

Έστω ότι αποσκοπούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_5^{10} (4 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2) dx \quad 2.3.11$$

Απλός διαφορικός λογισμός καταλήγει ότι :

$$I = \left( \frac{4}{5} \cdot 10^5 + 10^3 \right) - \left( \frac{4}{5} \cdot 5^5 + 5^3 \right) = 78375 \quad 2.3.12$$

Αντ' αυτού όμως θα εφαρμόσουμε την μέθοδο της Monte Carlo ολοκλήρωσης, διαλέγοντας με ίση πιθανότητα,  $N$  αριθμούς από το διάστημα  $[5,10]$  και επαναλαμβάνοντας την προσέγγιση 2.3.8 για  $N=1000, 4000, 16000$  και  $64000$ .

Θα αναφερόμαστε στα αποτελέσματα των προσεγγίσεων ως:  $\hat{I}_{1000}, \hat{I}_{4000}, \hat{I}_{16000}$  και  $\hat{I}_{64000}$ , ανάλογα του αριθμού  $N$  των αριθμών που επιλέγονται ισοπίθανα στο διάστημα  $[5,10]$ .

Παράλληλα σε κάθε προσέγγιση θα εκτιμούμε και την αντίστοιχη διασπορά, σχέση 2.3.10, χρησιμοποιώντας για τις τετραγωνικές ρίζες των διασπορών τους συμβολισμούς,  $\hat{\sigma}_{1000}, \hat{\sigma}_{4000}, \hat{\sigma}_{16000}$  και  $\hat{\sigma}_{64000}$ . Σας υπενθυμίζω ότι αυτές οι ποσότητες αποτελούν μέτρο της ακρίβειας του αποτελέσματος της Monte Carlo ολοκλήρωσης.

Προκειμένου να αναδείξουμε την στατιστικές ιδιότητες των εκτιμήσεων, θα επαναλαμβάνομε κάθε μία από τις εκτιμήσεις,  $\hat{I}_{1000}, \hat{I}_{4000}, \hat{I}_{16000}$  και  $\hat{I}_{64000}$ , για 4000 φορές. (Με άλλα λόγια, θα διαλέγουμε 4000 σύνολα  $N$  αριθμών, ισοπίθανα κατανομημένους στο διάστημα  $[5,10]$  και θα υπολογίζουμε, βάσει της 2.3.8, 4000 τιμές της τυχαίας μεταβλητής  $\hat{I}_N$ .)

Τα αποτελέσματα των υπολογισμών<sup>14</sup>, για τις τέσσερες κατηγορίες εκτιμήσεων, παρίστανται εν είδη ιστογράμματος στο Σχήμα 2.3.1. Αναλυτικότερα το ιστόγραμμα 2.3.1.α παριστά την συχνότητα εμφάνισης τιμών της τυχαίας μεταβλητής  $\hat{I}_{1000}$ , (εκτίμηση της αριθμητικής τιμής του ολοκληρώματος με  $N=1000$ ) και αντίστοιχα τα ιστογράμματα 2.3.1.β - 2.3.1.γ παριστούν την συχνότητα εμφάνισης τιμών των τυχαίων μεταβλητών  $\hat{I}_{4000}, \hat{I}_{16000}$  και  $\hat{I}_{64000}$ .

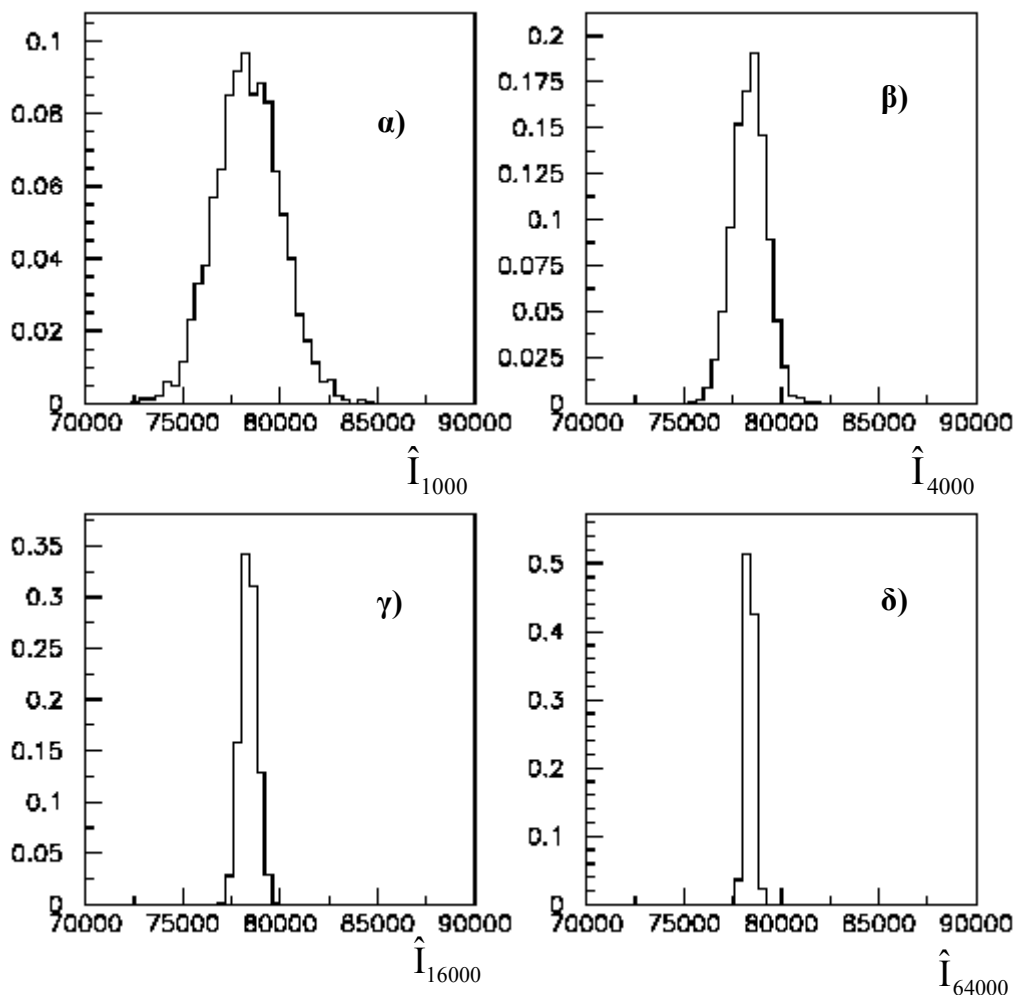
Εκ του Σχήματος 2.3.1 είναι σαφής ο στατιστικός χαρακτήρας της εκτίμησης του ολοκληρώματος. Οι προσεγγιστικές εκτιμήσεις δίνουν τιμές κοντά στην πραγματική τιμή (78375) και είναι χαρακτηριστικό ότι οι αναμενόμενες τιμές και των τεσσάρων εκτιμήσεων (όπως εύκολα μπορεί να υπολογίσει κανείς, βλέπε Ερώτηση ...) είναι ίσες με την πραγματική τιμή.

Χαρακτηριστικό επίσης είναι ότι αυξάνοντας το πλήθος  $N$  οι εκτιμήσεις συγκεντρώνονται περί την πραγματική τιμή. Είναι συνεπώς λογικό να εκφράζουμε

<sup>14</sup> Για τους υπολογισμούς και τα αποτελέσματα σ' αυτό το παράδειγμα χρησιμοποίησα την γεννήτρια ισοπίθανων αριθμών, RNDM, της βιβλιοθήκης προγραμμάτων του CERN (CERNLIB). Περισσότερα για την ισοπίθανη παραγωγή αριθμών αναφέρονται στο Κεφάλαιο 4.

ποσοτικά την ακρίβεια της εκτίμησης με την διασπορά (καλλίτερα με την τετραγωνική ρίζα της διασποράς) της εκτίμησης  $\hat{I}_N$ .

Εφαρμόζοντας την σχέση 2.3.9, για την περίπτωση που αναλύουμε, καταλήγουμε ότι:



**Σχήμα 2.3.1:** Τα ιστογράμματα παριστούν την συχνότητα εμφάνισης τιμών των τυχαίων μεταβλητών  $\hat{I}_N$  (εκτιμήσεων του ολοκληρώματος της σχέσης 2.3.1): α) για  $N=1000$  ( $\hat{I}_{1000}$ ), β) για  $N=4000$  ( $\hat{I}_{4000}$ ), γ) για  $N=16000$  ( $\hat{I}_{16000}$ ) και δ) για  $N=1000$  ( $\hat{I}_{64000}$ )

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{N} \cdot V(g(x))} = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \int_a^b (1-g(x) \cdot (b-a))^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \int_5^{10} (78375 - 20 \cdot x^4 - 15 \cdot x^2)^2 \cdot \frac{1}{5} dx}$$

$$\sigma_{1000} = 1702.9$$

2.3.13<sup>15</sup>

$$\sigma_{4000} = 851.4$$

$$\sigma_{16000} = 425.7$$

$$\sigma_{64000} = 212.9$$

Βεβαίως για τις περισσότερες των πρακτικών εφαρμογών, πραγματική τιμή του ολοκληρώματος είναι άγνωστη (άλλωστε είναι το ζητούμενο) και η σχέση 2.3.13 έχει θεωρητική μόνο αξία. Πρακτική χρήση βρίσκει η σχέση 2.3.10, εκτίμησης της ακρίβειας,  $\hat{\sigma}_N$ , της προσέγγισης (εκτίμησης) του ολοκληρώματος.

Στο Σχήμα 2.3.2 παρίστανται οι συχνότητες τιμών για τις μεταβλητές  $\hat{\sigma}_{1000}$ ,  $\hat{\sigma}_{4000}$ ,  $\hat{\sigma}_{16000}$  και  $\hat{\sigma}_{64000}$ , όπου είναι εμφανείς ο στατιστικός τους χαρακτήρας. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αναμενόμενη τιμή κάθε μία από τις μεταβλητές  $\hat{\sigma}_{1000}$ ,  $\hat{\sigma}_{4000}$ ,  $\hat{\sigma}_{16000}$  και  $\hat{\sigma}_{64000}$  συμφωνεί με τις τιμές τις σχέσης 2.3.13, όπως μπορεί να εξακριβωθεί από τα ιστογράμματα του Σχήματος 2.3.2.

**Ας ανακεφαλαιώσουμε:**

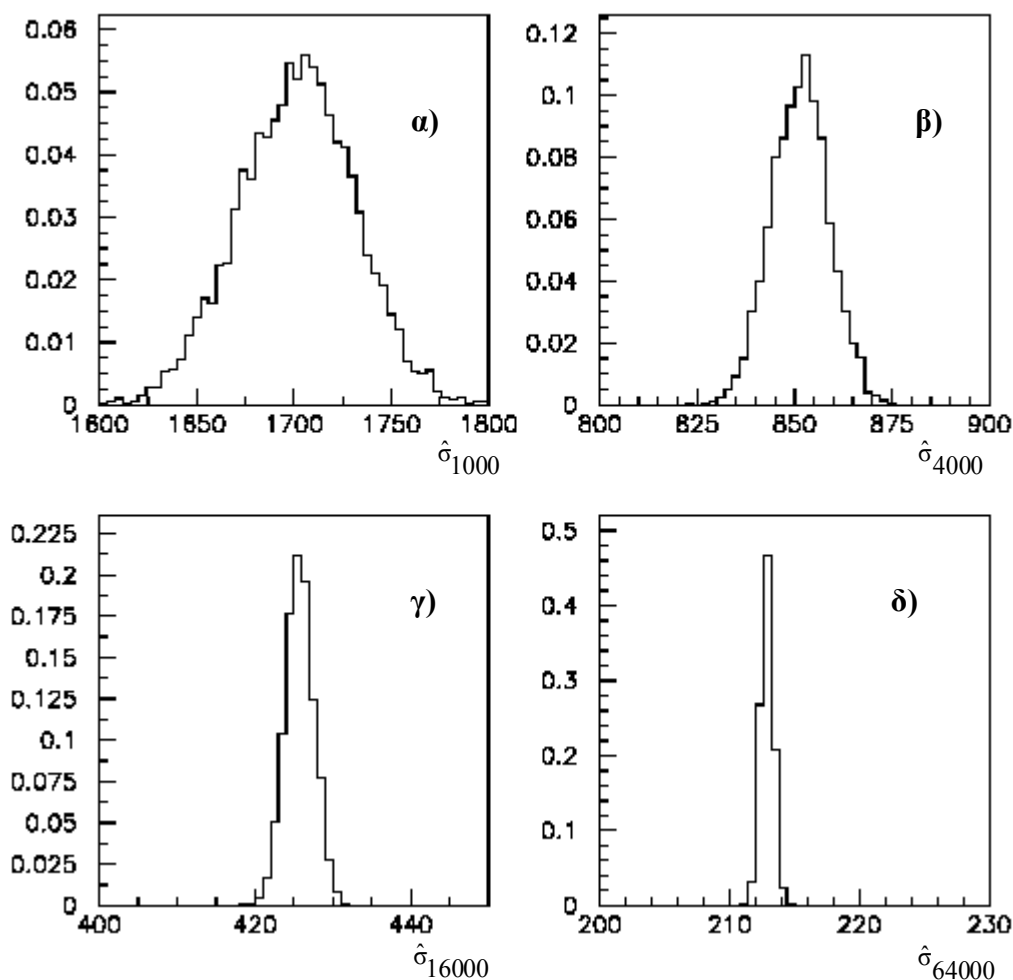
**Επιλέγοντας ισοπίθανα N αριθμούς στο διάστημα [5,10] εκτιμούμε την τιμή του ολοκληρώματος 2.3.11 εφαρμόζοντας την σχέση 2.3.8 . Εάν επαναλάβουμε την εκτίμηση χρησιμοποιώντας ένα άλλο σύνολο N αριθμών, επιλεγμένων ισοπίθανα από το ίδιο διάστημα [5,10], θα καταλήξουμε σε διαφορετική τιμή. Δείξαμε ότι η εκτίμηση του ολοκληρώματος είναι τυχαία μεταβλητή που κατανέμεται γύρω από την πραγματική τιμή με διασπορά που δίνει η σχέση 2.3.9.**

**Όταν το πλήθος όρων, N, που χρησιμοποιούμε τείνει στο άπειρο, η διασπορά των εκτιμήσεων τείνει στο μηδέν και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας εκφυλίζεται σε δ συνάρτηση.**

**Χρησιμοποιούμε την τετραγωνική ρίζα της διασποράς για να εκφράσουμε την ακρίβεια της προσέγγισης. Στην πράξη μπορούμε μόνο να εκτιμήσουμε<sup>16</sup> την ακρίβεια της προσέγγισης, με την σχέση 2.3.10.**

<sup>15</sup> Πράγματι οι τιμές αυτές είναι σε συμφωνία με τις τιμές που υπολογίζει κανείς από τα ιστογράμματα του Σχήματος 2.3.1

<sup>16</sup> Με το ίδιο σύνολο των N ισοπιθάνως επιλεγμένων αριθμών εκτιμούμε την τιμή του ολοκληρώματος και την διασπορά της εκτίμησης. Είναι λάθος να υποθέτει κανείς ότι η εκτίμηση της διασποράς εκφράζει την ακρίβεια της συγκεκριμένης εκτίμησης του ολοκληρώματος (που έγινε με το ίδιο σύνολο N ισοπίθανως επιλεγμένων αριθμών).



**Σχήμα 2.3.2:** Τα ιστογράμματα παριστούν την συχνότητα εμφάνισης τιμών των τυχαίων μεταβλητών  $\hat{\sigma}_N$  (εκτιμήσεων της ακρίβειας υπολογισμού ολοκληρώματος της σχέσης 2.3.11): α) για  $N=1000$  ( $\hat{\sigma}_{1000}$ ), β) για  $N=4000$  ( $\hat{\sigma}_{4000}$ ), γ) για  $N=16000$  ( $\hat{\sigma}_{16000}$ ) και δ) για  $N=64000$  ( $\hat{\sigma}_{64000}$ )

### 2.3. Θεώρημα κεντρικού ορίου

Έστω ένα σύνολο από  $N$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ . Έστω ακόμη ότι η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής  $X_i$  είναι  $\mu_i$  και  $\sigma_i$  αντίστοιχα ( $i=1,2,3,\dots,N$ ).

Δείξαμε ότι (βλέπε παράγραφο 1.12, εξισώσεις 1.12.3, 1.12.11, με  $\alpha_i=1$  και

$\text{cov}(x_i, x_j)=0$ ), η μεταβλητή  $S = \sum_{i=1}^N x_i$  είναι τυχαία μεταβλητή με αναμενόμενη τιμή και

διασπορά που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^N x_i\right) = \sum_{i=1}^N \mu_i$$

$$V(S) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$$

ανεξάρτητα από τις συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών.

Κάτω από τις ίδιες συνθήκες (συν την απαίτηση κάποιες ροπές να είναι πεπερασμένες) το Θεώρημα του Κεντρικού Ορίου δείχνει<sup>18</sup> ότι το άθροισμα  $S$ , κατανέμεται στο ασυμπτωτικό όριο, όταν δηλαδή το  $N$  τείνει στο άπειρο, σύμφωνα με Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Συγκεκριμένα:

**Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $S$ , που ορίζεται ως το άθροισμα  $N$  ανεξαρτήτων μεταβλητών:  $S = \sum_{i=1}^N x_i$ , τείνει να γίνει Gaussian (κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας) καθώς το πλήθος,  $N$ , των ανεξαρτήτων μεταβλητών τείνει στο άπειρο.**

<sup>18</sup> Η απόδειξη του Θεωρήματος του Κεντρικού Ορίου στη γενική του μορφή είναι λίγο περίπλοκη. Αντ' αυτής θα δώσουμε την απόδειξη για την περίπτωση όπου όλες οι τυχαίες μεταβλητές έχουν την ίδια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:  $f_i(x_i)=f(x)$   $i=1,2,3,...N$ . Προφανώς, θα ισχύει επιπλέον ότι:  $\mu_i=\mu=E(x)$  και ότι  $\sigma_i=\sigma$  για  $i=1,2,3,...N$ . Θα υποθέσουμε επίσης ότι και οι ροπές ανώτερες τάξης υπάρχουν και είναι πεπερασμένες, καθώς και ότι (χωρίς να επηρεάσουμε την γενικότητα της απόδειξης) θα θεωρήσουμε ότι  $\mu=0$  και κατά συνέπεια  $\sigma=E(x^2)$ . Η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαία μεταβλητής  $X$ , μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Taylor ως εξής:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itx}) = 1 + \frac{(it)^2}{2} \cdot \sigma^2 + \frac{(it)^3}{3!} \cdot \sigma^3 + \dots = 1 - \frac{\sigma^2 \cdot t^2}{2} + \dots \quad (\alpha)$$

Ας ορίσουμε την μεταβλητή  $u = \frac{x}{\sigma \cdot \sqrt{N}}$ , η οποία έχει διασπορά  $1/N$  (επειδή η μεταβλητή  $X$  έχει διασπορά  $\sigma^2$ ). Εφαρμόζοντας την σχέση (α) καταλήγουμε για την χαρακτηριστική συνάρτηση  $\varphi_u(t)$  ότι:

$$\varphi_u(t) = E(e^{itu}) = 1 - \frac{t^2}{2 \cdot N} + \dots \quad (\beta)$$

Επειδή η χαρακτηριστική συνάρτηση του αθροίσματος αμοιβαίως ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών είναι το γινόμενο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των τυχαίων μεταβλητών θα ισχύει ότι:

$$S_u = \sum_{i=1}^N u_i \quad \text{και} \quad \varphi_{S_u}(t) = (\varphi_u(t))^N = \left(1 - \frac{t^2}{2 \cdot N} + \dots\right)^N \quad \text{ώστε:} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{S_u}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t^2}{2 \cdot N} + \dots\right)^N = e^{-t^2/2}$$

Αλλά η συνάρτηση  $e^{-t^2/2}$  είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της Gaussian συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ώστε:

$$g(S_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{S_u^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{S^2}{2\sigma^2 N}} \quad \text{ή} \quad f(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot \sqrt{N}} e^{-\frac{S^2}{2\sigma^2 N}}$$



$$f(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(S-\mu)^2}{2\sigma^2}} = N(S; \mu, \sigma) \quad \text{όπου } \mu = \sum_{i=1}^N \mu_i \quad \text{και} \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \quad 2.4.1$$

**Ερώτηση:** Δείξτε ότι:

$$f\left(\frac{S - \sum_{i=1}^N \mu_i}{\left[\sum_{i=1}^N \sigma_i^2\right]^{1/2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}[1]} e^{-\frac{s^2}{2}} \equiv N(S; 0, 1) \quad 2.4.2$$

Βεβαίως για όλες τις πρακτικές εφαρμογές η σχέση 2.4.1 εφαρμόζεται προσεγγιστικά για πεπερασμένο άθροισμα τυχαίων μεταβλητών. Η ακρίβεια τέτοιων προσεγγίσεων, για πεπερασμένο πλήθος όρων (N), εξαρτάται από τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και προφανώς από το πλήθος των όρων του αθροίσματος.

Στα επόμενα δύο παραδείγματα επιδεικνύεται η προσεγγιστική χρήση του Θεωρήματος του Κεντρικού Ορίου.

**Παράδειγμα 2.4.1:** Gaussian γεννήτρια τυχαίων αριθμών.

Έστω ότι  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_N$  είναι τυχαίες μεταβλητές με την ίδια συνάρτηση πυκνότητας

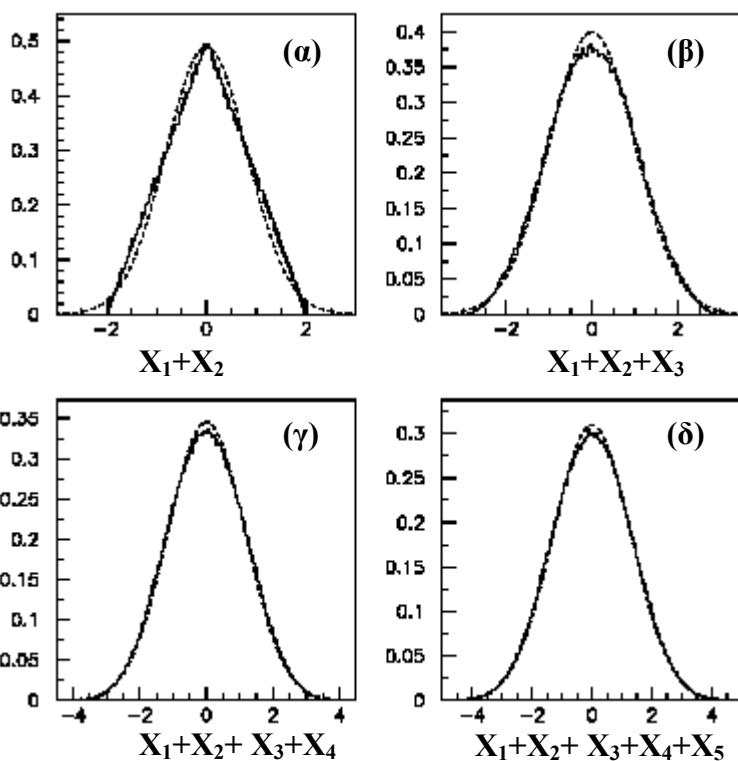
πιθανότητας,  $f(u_i) = f(u) = \begin{cases} 1/2 & -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$ , (δηλαδή οι τιμές των τυχαίων μεταβλητών

$\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$  διαλέγονται ισοπίθανα από το διάστημα  $[-1, 1]$ ). Προφανώς  $E(u) = \mu = 0$  και  $V(u) = \sigma^2 = 1/3$ . Σύμφωνα με την 2.4.1, όταν το N τείνει στο άπειρο, η τυχαία

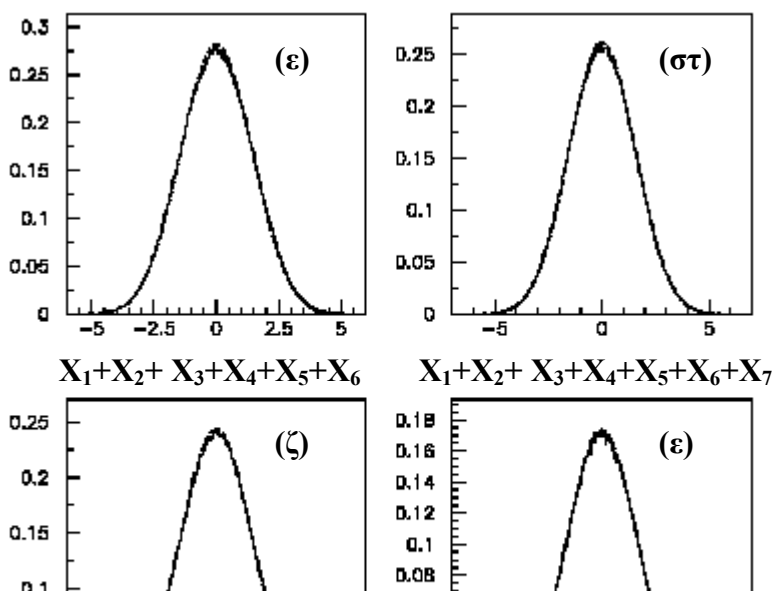
μεταβλητή R:  $R = \sum_{i=1}^N u_i$ , έχει Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

$$f(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \left[\sum_{i=1}^N \sigma_i^2\right]^{1/2}} \cdot e^{-\frac{\left(S - \sum_{i=1}^N \mu_i\right)^2}{2 \cdot \left[\sum_{i=1}^N \sigma_i^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \left[\frac{N}{3}\right]^{1/2}} \cdot e^{-\frac{(S)^2}{2 \cdot \left[\frac{N}{3}\right]}} \quad 2.4.4$$

Σε πληθώρα εφαρμογές θα χρειαστούμε έναν αλγόριθμο παραγωγής τιμών για κάποια τυχαία μεταβλητή σύμφωνα με κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Είναι εύλογο να χρησιμοποιήσουμε το άθροισμα  $N$  τυχαίων μεταβλητών,  $R$ , που παίρνουν τιμές ισοπίθανα, υποθέτοντας ότι η τυχαία μεταβλητή  $R$  θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από την σχέση 2.4.4.



**Σχήμα 2.4.1:** Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (ιστογράμματα) για το άθροισμα α) δύο, β) τριών, γ) τεσσάρων και δ) πέντε τυχαίων μεταβλητών που παίρνουν τιμές ισοπίθανα στο διάστημα  $[-1,1]$ . Οι συνεχείς καμπύλες αντιστοιχούν στην Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.



**Σχήμα 2.4.1:** Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (ιστογράμματα) για το άθροισμα ε) έξι, β) επτά, γ) οκτώ και δ) σέκα έξι τυχαίων μεταβλητών που παίρνουν τιμές ισοπίθανα στο διάστημα  $[-1,1]$ . Οι συνεχείς καμπύλες αντιστοιχούν στην Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Στο Σχήμα 2.4.1, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα υπολογιστικού πειράματος που εκτελέσαμε με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήσαμε μία γεννήτρια ισοπίθανης παραγωγής τιμών στο διάστημα  $[-1,1]$ . Στο Σχήμα 2.4.1.α παρουσιάζεται υπό μορφή ιστογράμματος η κατανομή της πυκνότητας πιθανότητας που προκύπτει για το άθροισμα δύο ισοπίθανων τυχαίων μεταβλητών σε σύγκριση με την Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (συνεχή γραμμή στο Σχήμα 2.4.1) με αναμενόμενη τιμή  $\mu=0$  και με διασπορά  $\sigma^2=N/3=2/3$ . Αν και η προκύψασα τυχαία μεταβλητή (το άθροισμα δύο ισοπίθανων κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών) έχει αναμενόμενη τιμή και διασπορά ίση με μηδέν και  $2/3$  αντίστοιχα, σε συμφωνία με την σχέσεις 1.12.3 και 1.12.11, απέχει πολύ από το να χαρακτηριστεί ότι ακολουθεί κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Βεβαίως, όσο το πλήθος των τυχαίων μεταβλητών που συμμετέχουν στο άθροισμα αυξάνει η Gaussian προσέγγιση γίνεται περισσότερο επιτυχής.

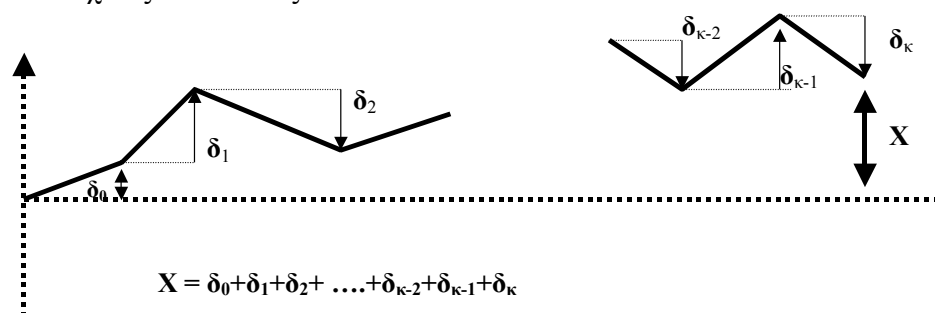
Στις πειραματικές επιστήμες, είναι τόσο σύνηθες οι μετρήσεις να ακολουθούν Gaussian κατανομές ώστε να θεωρείται ότι κάθε κατανομή μετρήσεων πρέπει να είναι Gaussian. Όπως θα φανεί στις επόμενες παραγράφους, αυτή η γενίκευση είναι λανθασμένη. Αλλά υπάρχει ένας πολύ απλός λόγος, γιατί η πλειοψηφία των μετρήσεων να είναι αυτής της μορφής.

**Παράδειγμα 2.4.2:** *Ας πάρουμε σαν παράδειγμα την κίνηση μίας σφαίρας σε οριζόντιο, μη λείο δάπεδο. Η κίνηση κάθε άλλο από ευθύγραμμη είναι. Όπως εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς, η σφαίρα στο τέλος της διαδρομής της θα έχει μία εγκάρσια μετατόπιση από την ιδεατή της τροχιά. Εύκολα, επίσης, μπορούμε να ερμηνεύσουμε αυτή την εκτροπή σαν το αποτέλεσμα διαδοχικών συγκρούσεων (σκεδάσεων) της σφαίρας με εξογκώματα της επιφάνειας του τραπεζιού. Σε ανάλογες αλληλεπιδράσεις, εξ' άλλου, συνίσταται και το φαινόμενο της τριβής.*

Στο Σχήμα 2.4.2, παρίστανται σχηματικά αυτές οι διαδοχικές σκεδάσεις, καθώς και η τελική μετατόπιση  $X$  σαν άθροισμα των επιμέρους μετατοπίσεων  $\delta$ .

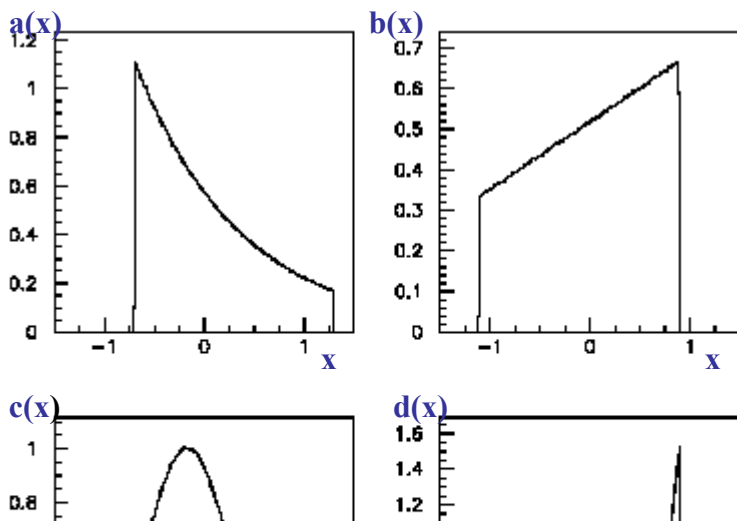
**Σχήμα 2.4.2 :**

Διαδοχικές Σκεδάσεις.

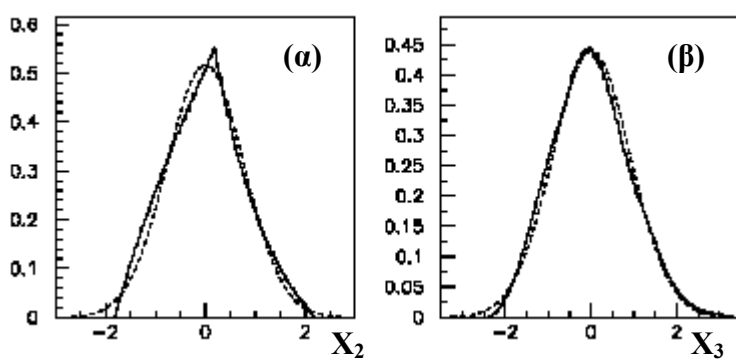


Η συνολική απομάκρυνση της σφαίρας  $X$ , αλλά και η έκβαση κάθε επιμέρους σκέδασης είναι τυχαίες μεταβλητές ( εάν το πείραμα επαναληφθεί, η σφαίρα θα εκτραπεί κατά διαφορετική ποσότητα), και μάλιστα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των σκεδάσεων είναι δύσκολο να προσδιορισθεί. Η συνολική όμως μετατόπιση από την ευθύγραμμη κίνηση, μετά από μεγάλο αριθμό σκεδάσεων, ακολουθεί Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας διότι πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του κεντρικού ορίου, όπως και είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί πειραματικά. '

Προκειμένου να δείξουμε τις συνέπειες του Θεωρήματος του Κεντρικού ορίου σε φαινόμενα όπως αυτό της πολλαπλής σκέδασης, επιχείρησα το ακόλουθο πειραματισμό προσομοίωσης. Υπέθεσα ότι η εγκάρσια απομάκρυνση,  $\delta_i$  όπου  $i=1,2,3,\dots,N$ , στις επιμέρους σκεδάσεις έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από μία από



τις συναρτήσεις :  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$ ,  $d(x)$ ,  $e(x)$ ,  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $r(x)$ , που παρίστανται γραφικά στο Σχήμα 2.4.3.



Στο Σχήμα 2.4.4 παρίστανται γραφικά οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της συνολικής εγκάρσιας απομάκρυνσης,  $X$ , της σφαίρας μετά από δύο, τρεις, τέσσερις, πέντε, έξι, επτά, οκτώ και δέκα έξι σκεδάσεις.

Συγκεκριμένα, υπέθεσα ότι στην περίπτωση που συμβαίνουν δύο σκεδάσεις μία εκ των σκεδάσεων καταλήγει σε εγκάρσια μετατόπιση σύμφωνα με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $a(x)$  και η άλλη σύμφωνα με την συνάρτηση  $b(x)$ . Ομοίως, στην περίπτωση των τριών σκεδάσεων, οι τρεις εγκάρσιες μετατοπίσεις έχουν ως συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας τις  $a(x)$ ,  $b(x)$  και  $c(x)$  αντίστοιχα. Στην περίπτωση των τεσσάρων σκεδάσεων εμπλέκονται οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$  και  $d(x)$  κ.ο.κ. Τέλος στην περίπτωση των δέκα έξι

σκεδάσεων οι εγκάρσιες μετατοπίσεις παίρνουν, ανά δύο, τιμές σύμφωνα με τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$ ,  $d(x)$ ,  $e(x)$ ,  $f(x)$ ,  $g(x)$  και  $h(x)$ .

Είναι προφανές ότι, ανεξάρτητα από την επιλογή των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας για τα επιμέρους φαινόμενα, το συνολικό αποτέλεσμα ακολουθεί κανονική κατανομή, αρκεί τα επιμέρους φαινόμενα να είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Η συνθήκη αυτή, της επαλληλίας ανεξαρτήτων υπο-φαινομένων, ικανοποιείται στην πλειοψηφία των μετρητικών διαδικασιών ώστε το συνολικό αποτέλεσμα, η μέτρηση, να χαρακτηρίζεται από Gaussian πυκνότητα πιθανότητας.

## 2.5 Σφάλματα Μετρήσεων

Στα επόμενα παραθέτουμε, προφανείς παρατηρήσεις που αφορούν τυχαίες μεταβλητές και μετρήσεις.

*Μία τυχαία μεταβλητή παίρνει τιμές σύμφωνα με μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,*

*Επαναλαμβανόμενες μετρήσεις μίας φυσικής ποσότητας κατανέμονται γύρω από την πραγματική τιμή (της φυσικής ποσότητας) σύμφωνα με μία*

συνάρτηση κατανομής που είναι χαρακτηριστική της μετρητικής διαδικασίας.

Στην στατιστική η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να είναι οποιαδήποτε κατάλληλα κανονικοποιημένη συνάρτηση

Στην πειραματική φυσική υπάρχουν διάφορα φαινόμενα που προκαλούν την διασπορά των μετρήσεων. Λόγω του Θεωρήματος του Κεντρικού Ορίου, περιμένουμε τις περισσότερες από τις συναρτήσεις κατανομής μετρήσεων να είναι Gaussians.

Μπορούμε να μετρήσουμε την διακριτική ικανότητα της μετρητικής μας συσκευής,  **$\sigma$** , σαν την τετραγωνική ρίζα της διασποράς των αποτελεσμάτων της επαναλαμβανόμενης μέτρησης.

Συνήθως το πρόβλημα που τίθεται είναι το ακόλουθο:

**Έστω μετρητική συσκευή με διακριτική ικανότητα  $\sigma$  και έστω  $x$ , ένα και μοναδικό αποτέλεσμα μέτρησης της φυσικής ποσότητας. Ποία είναι η σχέση του αποτελέσματος της μέτρησης με την πραγματική τιμή της φυσικής ποσότητας,  $x_R$ ;**

Θα θεωρήσουμε ότι, λόγω του θεωρήματος του κεντρικού ορίου (επειδή στις περισσότερες των πρακτικών εφαρμογών συντρέχουν όλοι εκείνες οι προϋποθέσεις για να ισχύει το θεώρημα του κεντρικού ορίου) η κατανομή των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων είναι Gaussian<sup>19</sup>. Η πιθανότητα λοιπόν το αποτέλεσμα της μέτρησης μας να είναι μεταξύ  $x$  και  $x+dx$ , δεδομένου ότι η πραγματική τιμή είναι  $x_R$ , θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

---

<sup>19</sup> Η γενική περίπτωση θα συζητηθεί στις επόμενες παραγράφους. Είναι όμως προφανές ότι η αποδοχή της Gaussian κατανομής μετρήσεων καλύπτει τις περισσότερες από τις περιπτώσεις.



$$P(x | x_R) dx = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_R - x)^2}{2\sigma^2}} dx \quad 2.5.1$$

$$\int_a^b P(x | x_R) dx = 1$$

Όπου  $N$ , είναι ένας παράγοντας κανονικοποίησης ώστε η συνολική πιθανότητα στο διάστημα  $[a, b]$ , των επιτρεπτών τιμών (π.χ. φανταστείτε ότι το μετρούμενο μέγεθος δεν μπορεί να πάρει τιμές έξω από  $[a, b]$ ) να ισούται με ένα.

Εάν δεν ξέρουμε την πραγματική τιμή της φυσικής ποσότητας και πριν επιτελέσουμε την μέτρηση, όλοι οι αριθμοί της περιοχής  $[a, b]$  είναι το ίδιο κατάλληλοι για να είναι η πραγματική τιμή.

**Συνεπώς, πριν κάνουμε οποιαδήποτε μέτρηση, μπορούμε να εκφράσουμε την πιθανότητα ( $P_0(x_R)$ ) ώστε, η πραγματική τιμή του φυσικού μεγέθους να είναι ένας (πραγματικός) αριθμός μεταξύ  $x_R$  και  $x_R + dx_R$ , ως:**

$$P_0(x_R) = \begin{cases} \frac{dx_R}{b-a} & x_R \in [a, b] \\ 0 & x_R \notin [a, b] \end{cases} \quad 2.5.2$$

Επίσης, εάν δεν ξέρουμε την πραγματική τιμή της φυσικής ποσότητας, δεν έχουμε κανένα τρόπο να προβλέψουμε το αποτέλεσμα της μέτρησης.

**Πριν εκτελέσουμε την μέτρηση, προσάπτουμε σε κάθε στοιχειώδη περιοχή, από  $x$  μέχρι  $x+dx$  (στο διάστημα  $[a, b]$ ) την ίδια πιθανότητα ( $M_0(x)$ ) να εμφανιστεί ως αποτέλεσμα της μετρητικής μας διαδικασίας. Ωστε:**

$$M_0(x) = \begin{cases} \frac{dx}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases} \quad 2.4.3$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 2.4.1, 2.4.2 και 2.4.3 με το θεώρημα του Bayes (βλέπε σχέση 1.4.1) καταλήγουμε στην έκφραση:

$$P(x_R | x) = \frac{P(x | x_R) \cdot P_0(x_R)}{M_0(x)}$$

$$P(x_R | x) = \begin{cases} \frac{\left( \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_R-x)^2}{2\sigma^2}} dx \right) \cdot \frac{dx_R}{b-a}}{\frac{dx}{b-a}} = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_R-x)^2}{2\sigma^2}} dx_R, & x_R \in [a,b] \\ 0, & x_R \notin [a,b] \end{cases} \quad 2.4.4$$

Η σχέση 2.4.4, εκφράζει όλη την γνώση αποκομίσαμε αναφορικά με την πραγματική τιμή της φυσικής ποσότητας, αφού εκτελέσαμε μία και μόνο μέτρηση. Σαφώς δεν ξέρουμε ποία είναι η πραγματική τιμή της φυσικής ποσότητας αλλά μπορούμε να προσάψουμε πιθανότητα σε κάθε στοιχειώδη περιοχή  $[x, x+dx]$  να περιέχει την πραγματική τιμή. Η σχέση 2.4.4 παίζει τον ρόλο της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της πραγματικής τιμής ενώ η πραγματική τιμή έχει πλέον τα χαρακτηριστικά της τυχαίας μεταβλητής.

#### Συμπερασματικά:

- Πριν εκτελέσουμε οποιαδήποτε μέτρηση της φυσικής ποσότητας:
  - 1) Γνωρίζουμε: α) την συναρτησιακή μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των μετρήσεων (Gaussian), β) την σχέση της μέσης τιμής της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας με την πραγματική τιμή (παραδεχθήκαμε ισότητα) και γ) την τετραγωνική απόκλιση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.
  - 2) Προσάπτουμε ( εκ των προτέρων γνώση) ίσες πιθανότητες σ' όλους τους πραγματικούς αριθμούς (της περιοχής  $[a,b]$ ) να είναι η πραγματική τιμή της υπό μέτρηση φυσικής ποσότητας.
  - 3) Κάθε πραγματικός αριθμός, στην περιοχή δυνατών τιμών  $[a,b]$ , έχει την ίδια πιθανότητα να αποτελέσει αποτέλεσμα της μέτρησης.
- Μετά την εκτέλεση μίας μέτρησης της φυσικής ποσότητας:

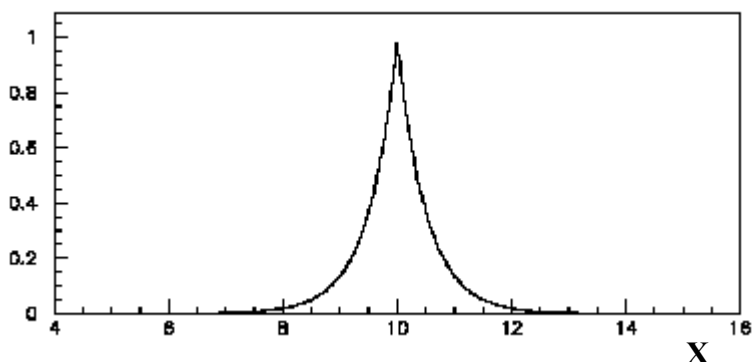
Μπορούμε να προσάψουμε συγκεκριμένη πιθανότητα σε κάθε στοιχειώδη περιοχή των πραγματικών αριθμών, σύμφωνα με την 2.4.4., να περιέχει την πραγματική τιμή του υπό μέτρηση φυσικού μεγέθους

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, η διακριτική ικανότητα της μετρητικής συσκευής,  $\sigma$ , καθορίζει την διασπορά της πραγματικής τιμής, όπως φαίνεται στην 2.4.4. Το δε λεγόμενο «σφάλμα της μέτρησης» εκφράζει ακριβώς αυτήν την απόκλιση των τιμών που μπορεί να πάρει η «πραγματική τιμή»<sup>20</sup> από το αποτέλεσμα της μέτρησης.

Στην πράξη, αναφέρουμε σαν σφάλμα μίας μέτρησης την τετραγωνική ρίζα της διασποράς, δηλαδή την τιμή του  $\sigma$  της σχέση 2.4.4. Αυτή η ποσότητα, όπως ήδη ελέχθη, στην περίπτωση μετρητικών συσκευών δεν είναι τίποτα άλλο από την διακριτική ικανότητα της συσκευής. Στην περίπτωση εκτιμητικών διαδικασιών όμως (π.χ. ανάλυση στατιστικών δεδομένων που καταλήγουν στην εκτίμηση της «πραγματικής τιμής» κάποιου μεγέθους), το σφάλμα είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς της εκτιμητέας ποσότητας, η οποία πέραν από τα μετρητικά σφάλματα εξαρτάται από την μεθοδολογία ανάλυσης.

#### Παράδειγμα 2.5.1

Έστω ότι κάποια μετρητική συσκευή χρησιμοποιείται για την μέτρηση φυσικής ποσότητας,  $X$ . Ας υποθέσουμε ότι η πραγματική τιμή της  $X$  είναι 10.



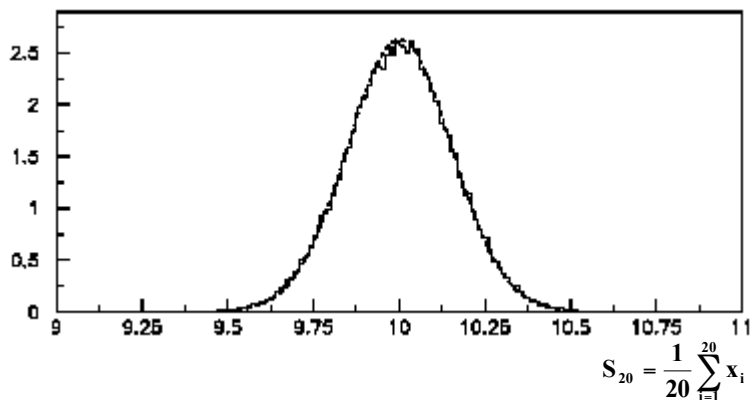
**Σχήμα 2.5.1:** Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μετρήσεων της ποσότητας  $X$ , όπως προσεγγίστηκε από 2000000 επαναλήψεις της ίδιας μέτρησης

Στο Σχήμα 2.5.1 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των μετρήσεων της ποσότητας  $X$ , που υπολογίστηκε μετά από συλλογή 2000000 επαναλήψεων της ίδιας μέτρησης. Από αυτές τις μετρήσεις είναι εύκολο να υπολογισθούν (προσεγγιστικά σύμφωνα με τις σχέσεις 2.2.6 και 2.2.10β) η

<sup>20</sup> Σας υπενθυμίζω για άλλη μια φορά ότι η «πραγματική τιμή» του φυσικού μεγέθους είναι τυχαία μεταβλητή διότι δεν μπορούμε να προσάψουμε συγκεκριμένη τιμή αλλά προσάπτουμε πιθανότητα σε κάθε πραγματικό αριθμό να είναι η «πραγματική τιμή» του μεγέθους.

αναμενόμενη τιμή και η τετραγωνική ρίζα της διασποράς των μετρήσεων, οι οποίες βρέθηκαν να είναι 10.00 και 0.63 αντίστοιχα. Είναι σαφές ότι η αναμενόμενη τιμή (του μεγάλου πλήθους) των μετρήσεων προσεγγίζει με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια την πραγματική τιμή. Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς των μετρήσεων θα καλείται στα επόμενα, διακριτική ικανότητα της μετρητικής συσκευής και προφανώς συμπίπτει με το σφάλμα της μετρήσεις από την μετρητική συσκευή.

Η ομάδα των πειραματιστών αποφάσισε να προσεγγίζει την πραγματική τιμή του μεγέθους  $X$ , εκτελώντας 20 μετρήσεις και υπολογίζοντας τον μέσο όρο τους. Σύμφωνα με την σχέση 2.4.2, ο μέσος όρος έχει κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με αναμενόμενη τιμή ίση με την πραγματική τιμή<sup>22</sup> και διασπορά,  $\sigma^2$ , ίση με  $0.63^2/20=0.0198$  ( $\sigma=0.141$ ). Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς,  $\sigma$ , αντιπροσωπεύει την διακριτική ικανότητα της μετρητικής μεθόδου, η οποία σαφώς εξαρτάται και από την διακριτική ικανότητα του οργάνου που χρησιμοποιήσαμε. Η ποσότητα  $\sigma$  είναι επίσης το σφάλμα προσδιορισμού της πραγματικής τιμής της ποσότητας  $X$ .



**Σχήμα 2.5.2:** Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του μέσου όρου 20 μετρήσεων, όπως προσδιορίστηκε από την επανάληψη της ίδιας μέτρησης. Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στην κανονική συνάρτηση όπως προβλέπεται από το Θεώρημα του Κεντρικού Ορίου

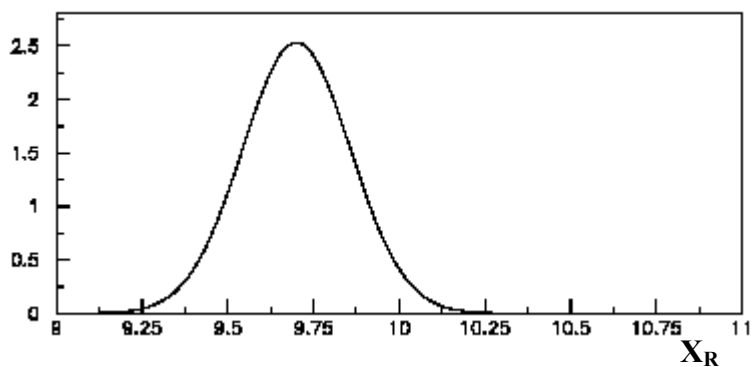
Πράγματι, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5.2, εάν κανείς επαναλάβει πολλές φορές (100000) την λήψη 20 μετρήσεων, τον υπολογισμό του μέσου όρου τους και στην συνέχεια προσδιορίσει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του μέσου όρου, θα καταλήξει σε κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με αναμενόμενη τιμή και  $\sigma$  (όπως υπολογίζονται από τα δεδομένα του Σχήματος 2.5.2) ίσα με 10 και 0.141.

<sup>22</sup> Διότι όπως ελέγξαμε προηγουμένως η αναμενόμενη τιμή των μετρήσεων είναι ίση με 10, όσο δηλαδή και η πραγματική τιμή του μεγέθους. Αφού λοιπόν η αναμενόμενη τιμή του μέσου όρου  $N$  μετρήσεων είναι ίση με την αναμενόμενη τιμή των μετρήσεων αναμένεται να είναι ίση και με την πραγματική τιμή του υπό μέτρηση μεγέθους.

Η ομάδα των πειραματιστών εκτελεί μία μόνο σειρά από 20 μετρήσεις καταλήγοντας στις τιμές: { 9.894216, 9.895958, 9.917391, 9.053773, 9.564336, 9.944962, 8.613512, 9.892406, 10.12885, 10.08975, 10.09461, 9.642553, 9.576256, 9.323130, 11.34587, 9.143096, 10.30736, 9.235592, 10.34878, 7.992024, 9.700222}. Από αυτές υπολογίζει τον μέσο όρο ίσο με 9.7 και εκτιμά (σύμφωνα με την σχέση 2.2.10β) την τετραγωνική ρίζα της διασποράς των μετρήσεων ίση με 0.675. Συνεπώς, εκτιμά ότι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς του μέσου όρου είναι  $0.675/(20)^{1/2}=0.15$ .

Σύμφωνα με όσα ελέγχθησαν στην αρχή αυτής της υποενότητας, η πραγματική τιμή του φυσικού μεγέθους δεν μπορεί να καθορισθεί από πεπερασμένο αριθμό μετρήσεων, αλλά έχει χαρακτήρα τυχαίας μεταβλητής με κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (επειδή προσδιορίστηκε ως μέσος όρος ανεξαρτήτων μετρήσεων, βλέπε Θεώρημα Κεντρικού Ορίου). Η αναμενόμενη τιμή της πραγματικής τιμής του φυσικού μεγέθους καθώς και η ακρίβεια προσδιορισμού της (η τετραγωνική ρίζα της διασποράς της πραγματικής τιμής) εκτιμούνται από την μέτρηση ως 9.7 και 0.15 αντίστοιχα. Συνήθως γράφουμε το αποτέλεσμα της μέτρησης ως:  $9.7 \pm 0.15$ , εννοώντας ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της πραγματικής τιμής είναι η κανονική

συνάρτηση:  $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0.15} e^{\frac{-(x-9.7)^2}{2 \cdot (0.15)^2}}$ , που παρίσταται στο Σχήμα 2.5.3.



**Σχήμα 2.5.3:** Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της πραγματικής τιμής της ποσότητας  $X$ , όπως καθορίστηκε από 20 επαναλαμβανόμενες μετρήσεις.

## 2.6 Χρήση πινάκων στον υπολογισμό σφαλμάτων.

Τα περισσότερα προβλήματα, που αντιμετωπίζει κανείς στην ανάλυση στατιστικών δεδομένων, αναφέρονται σε περισσότερο της μίας τυχαίας μεταβλητής. Παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση της αξιολόγησης της εμβέλειας ενός εκπαιδευτικού πειραματισμού, ο αξιολογητής έχει να αναλύσει τις απαντήσεις των εμπλεκόμενων σε ένα ερωτηματολόγιο καίριων ερωτήσεων. Οι απαντήσεις  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , σε κάθε μία από τις  $N$  ερωτήσεις<sup>23</sup> που απευθύνονται σε κάθε εμπλεκόμενο στο πείραμα, συνδέονται με τον βαθμό επιτυχίας του πειραματισμού με μία μη τετριμμένη σχέση της μορφής,  $g(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Προφανώς τόσο οι απαντήσεις όσο και ο βαθμός επιτυχίας του πειραματισμού,  $g(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , είναι τυχαίες μεταβλητές.

**Ερώτηση 2.6.1:** Γιατί οι απαντήσεις και ο βαθμός επιτυχίας του πειραματισμού, είναι τυχαίες μεταβλητές;

Γενικά μπορούμε να παραστήσουμε ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών ως ένα διάνυσμα

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} \quad 2.6.1$$

με συνιστώσες τις  $N$  τυχαίες μεταβλητές ως συνιστώσες.

Οι συνδιασπορές (covariances)  $\text{cov}(x_i, x_j)$ <sup>24</sup> μπορούν να θεωρηθούν στοιχεία του  $N \times N$  πίνακα  $\tilde{V}$

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} \text{cov}(x_1, x_1) & \text{cov}(x_1, x_2) & \dots & \text{cov}(x_1, x_N) \\ \text{cov}(x_2, x_1) & \text{cov}(x_2, x_2) & \dots & \text{cov}(x_2, x_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(x_N, x_1) & \text{cov}(x_N, x_2) & \dots & \text{cov}(x_N, x_N) \end{pmatrix} \quad 2.6.2$$

Δείξαμε όμως, ότι η διασπορά της συνάρτησης των τυχαίων μεταβλητών  $g(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , στην 1.13.7, εκφράζεται ως:

$$V(g) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial g}{\partial \mu_i} \frac{\partial g}{\partial \mu_j} \text{cov}(x_i, x_j) \quad 2.6.3$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mu_i} = \left[ \frac{\partial g}{\partial x_i} \right]_{x_i = \mu_i}$$

<sup>23</sup> Όπου θεωρούμε τις απαντήσεις συνεχείς μεταβλητές, π.χ.  $x_2=0.8$  σημαίνει ότι ο ερωτούμενος θεωρεί κατά 80% επαρκείς τους εκπαιδευτικούς.

<sup>24</sup> Θυμηθείτε ότι η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής  $x_i$  είναι:  $V(x_i) = \text{cov}(x_i, x_i)$

όπου  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_N$  είναι οι αναμενόμενες τιμές των τυχαίων μεταβλητών  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , αντίστοιχα. Οι αναμενόμενες τιμές μπορούν, καθ' όμοιο τρόπο με την 2.6.1, να παρασταθούν με το διάνυσμα:

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_N \end{pmatrix} \quad 2.6.4$$

Ας ορίσουμε το διάνυσμα  $\bar{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mu_1} \\ \frac{\partial g}{\partial \mu_2} \\ \dots \\ \frac{\partial g}{\partial \mu_N} \end{pmatrix}$  2.6.5

Χρησιμοποιώντας την 2.6.2 και 2.6.5, μπορούμε να γράψουμε την 2.6.3 με την μορφή:

$$V(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mu_1} & \frac{\partial g}{\partial \mu_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial \mu_N} \end{pmatrix} (\tilde{V}) \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mu_1} \\ \frac{\partial g}{\partial \mu_2} \\ \dots \\ \frac{\partial g}{\partial \mu_N} \end{pmatrix} = \bar{g}^T \cdot \tilde{V} \cdot \bar{g} \quad 2.6.6$$

Μπορούμε να «παιζουμε το ίδιο παιχνίδι» στην περίπτωση περισσότερων της μίας συναρτήσεων τυχαίων μεταβλητών, ως ακολούθως:

Έσωσαν,  $k$  συναρτήσεις των τυχαίων  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , μεταβλητών τις οποίες παριστούμε ως διάνυσμα  $\vec{G}$ , της μορφής:

$$\left. \begin{matrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \dots \\ g_k(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{G} = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \dots \\ g_k(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{pmatrix} \quad 2.6.7$$

Ορίζουμε την kxN Jacobian

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \mu_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \mu_2} & \frac{\partial g_1}{\partial \mu_N} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \mu_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \mu_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \mu_N} \\ \frac{\partial g_k}{\partial \mu_1} & \frac{\partial g_k}{\partial \mu_2} & \frac{\partial g_k}{\partial \mu_N} \end{pmatrix} \quad 2.6.8$$

Ας παραστήσουμε υπό μορφή πίνακα τις συνδιασπορές μεταξύ των συναρτήσεων  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$  ( $i=1,2,3,\dots,N$ ), ως:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \text{cov}(g_1, g_1) & \text{cov}(g_1, g_2) & \dots & \text{cov}(g_1, g_N) \\ \text{cov}(g_2, g_1) & \text{cov}(g_2, g_2) & \dots & \text{cov}(g_2, g_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(g_N, g_1) & \text{cov}(g_N, g_2) & \dots & \text{cov}(g_N, g_N) \end{pmatrix} \quad 2.6.9$$

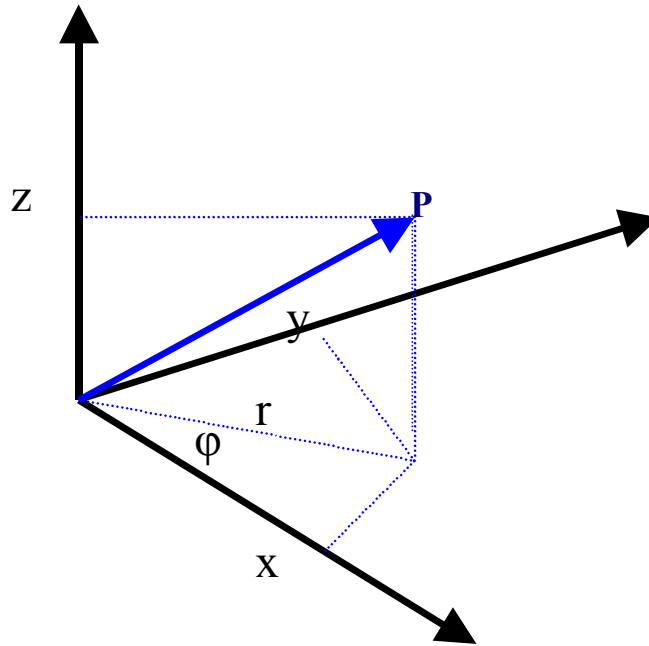
Είναι εύκολο να δείτε ότι ο πίνακας  $\tilde{C}$ , τα στοιχεία του οποίου δίνονται από την σχέση 1.13.8 μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο της Jacobian 2.6.8 και του πίνακα συνδιασποράς των μεταβλητών 2.6.2, δηλαδή:

$$C = J \cdot V \cdot J^T \quad 2.6.10$$



### Παράδειγμα 2.6.1:

Ας υποτεθεί, βλέπε σχήμα 2.6.1, ότι μετράμε την θέση υλικού σημείου, P, με τις τρεις κυλινδρικές συντεταγμένες  $r, \varphi, z$ . Ας θεωρήσουμε ότι το σφάλμα της μέτρησης του  $r$  είναι μηδέν και ότι οι μετρήσεις του  $\varphi$  και  $z$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, με σφάλματα  $\sigma_\varphi$  και  $\sigma_z$  αντίστοιχα..



Σχήμα 2.5.1. Μέτρηση των συντεταγμενων σημείου

Μπορούμε προφανώς, να εκφράσουμε την μέτρηση της θέσης του P σε καρτεσιανές συντεταγμένες  $x, y, z$ , ως:

$$\begin{aligned} g_1(r, \varphi, z) &= x = r \cdot \cos \varphi \\ g_2(r, \varphi, z) &= y = r \cdot \sin \varphi \\ g_3(r, \varphi, z) &= z = z \end{aligned} \quad 2.6.11$$

Ποιά θα είναι τα σφάλματα της νέας καρτεσιανής έκφρασης της μέτρησης μας;

Επειδή οι μετρήσεις των συντετεγμενων,  $r$ ,  $\varphi$  και  $z$ , είναι αμοιβαία ανεξάρτητες, ο πίνακας συνδιασποράς,  $\tilde{V}$ , των  $\{r, \varphi, z\}$  θα δίνεται ως:

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix} \quad 2.6.12$$

Είναι εύλογο να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό 1.13.8

$$\text{cov}(g_\lambda, g_v) = \sum_{i=1}^{N=3} \frac{\partial g_\lambda}{\partial \mu_i} \cdot \frac{\partial g_v}{\partial \mu_i} \cdot \text{cov}(x_i, x_j) \quad 2.6.13$$

$j=1$

όπου χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:  $\frac{\partial g_v}{\partial \mu_i} = \left[ \frac{\partial g_v}{\partial x_i} \right]_{x_i = \mu_i}$  και  $\mu_i$  είναι η

αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής  $x_i$  η οποία (υποθέτουμε, βλέπε υποενότητα 2.7) συμπίπτει με την πραγματική τιμή του αντιστοίχου μεγέθους  $X_i$ .

Έχοντας στην διάθεση μας μία μόνο μέτρηση,  $x_i$ , μπορούμε να εκφέρουμε γνώμη όσον αφορά στη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής,  $x_i$ , μόνο πιθανοκρατικά.

Ακολουθώντας όμοια ανάλυση με εκείνη της παραγράφου 2.5, καταλήγουμε ότι η πιθανότητα ώστε η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $x_i$  να είναι  $\mu_i$ , δεδομένης μίας μέτρησης της  $x_i$ , είναι :

$$P(\mu_i | x_i) = \frac{P(x_i | \mu_i) \cdot P(\mu_i)}{P(x_i)} = P(x_i | \mu_i)^1$$

Επιπλέον, υποθέτοντας ότι οι μετρήσεις μας ακολουθούν κανονική κατανομή (η  $P(x_i | \mu_i)$  είναι κατανομή Gauss με  $\sigma$  ίσον του σφάλματος με το οποίο προσδιορίζεται η  $x_i$ ), καταλήγουμε να εκφράσουμε την πιθανότητα ώστε η μέση τιμή να είναι οποιαδήποτε τιμή του πεδίου ορισμού του  $x_i$ , με την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

$$P(\mu_i | x_i) d\mu_i = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\mu_i - x_i)^2}{2\sigma^2}} d\mu_i \quad 2.6.14$$

Η καλύτερη εκτίμηση, την οποία είναι δυνατό να επιτύχουμε, για την τιμή του  $\mu_i$ , είναι αυτή που μεγιστοποιεί την  $P(\mu_i | x_i)$ , δηλαδή  $\mu_i = x_i$ .

Συνεπώς, προσεγγιστικά, οι παράγωγοι στην σχέση 2.6.13 υπολογίζονται ως:

$$\frac{\partial g_v}{\partial \mu_i} \Rightarrow \left[ \frac{\partial g_v}{\partial x} \right]_{x_i = x_i}$$

<sup>1</sup> Υπενθυμίζεται, ότι η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί χρησιμοποιήσαμε ισοπίθανες κατανομές για το  $P(\mu_i)$  και για το  $P(x_i)$ , εκφράζοντας έτσι την παντελή μας άγνοια.

Τα ακόλουθα είναι απλή εφαρμογή της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε σε αυτή την υποενότητα. Συγκεκριμένα:

Η Jacobian (σχέση 2.6.8) των συναρτήσεων 2.6.11 είναι:

$$\bar{J} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.6.15$$

Τελικώς, ο πίνακας συνδιασποράς των καρτεσιανών συντεταγμένων  $x, y$  και  $z$  είναι:

$$\begin{aligned} \bar{J} \cdot \bar{V} \cdot \bar{J} &= \begin{pmatrix} r^2 \sigma_\varphi^2 \sin^2 \varphi & -r^2 \sigma_\varphi^2 \cos\varphi \sin\varphi & 0 \\ -r^2 \sigma_\varphi^2 \sin\varphi \cos\varphi & r^2 \sigma_\varphi^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_\varphi^2 y^2 & -\sigma_\varphi^2 xy & 0 \\ -\sigma_\varphi^2 xy & \sigma_\varphi^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 2.6.16$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, ενώ οι μετρήσεις των κυλινδρικών συντεταγμένων είναι αμοιβαία ανεξάρτητες, ο μετασχηματισμός 2.6.11 καταλήγει σε στατιστικά εξαρτημένες μετρήσεις των καρτεσιανών συντεταγμένων.

Προφανώς, θα μπορούσε κανείς να μετρήσει με ανεξάρτητο τρόπο (κατ' ευθείαν) τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Η αλληλοεξάρτηση που εκφράζει η σχέση 2.6.16, είναι συνέπεια της μεθοδολογίας εκτίμησης των καρτεσιανών συντεταγμένων δια μέσου των (μη γραμμικών) μετασχηματισμών 2.6.11.

## 2.7 Συστηματικά σφάλματα.

Μέχρι τώρα έχουμε ασχοληθεί με τυχαία σφάλματα, υποθέτοντας ότι η πραγματική τιμή συμπίπτει με την αναμενόμενη τιμή των εκτιμήσεων (μετρήσεων) και έχει τον χαρακτήρα τυχαίας μεταβλητής. Δείξαμε ότι ο καλύτερος τρόπος για να ελαχιστοποιήσουμε τα τυχαία σφάλματα σε μία μέτρηση είναι να την επαναλάβουμε αρκετές φορές και να υπολογίσουμε τον μέσο όρο των μετρήσεων.

Τι θα συμβεί όμως στην περίπτωση, όπου οι μετρήσεις μας θα αποκλίνουν από την πραγματική τιμή κατά την ποσότητα  $\Delta x$ ; Εάν δηλαδή η αναμενόμενη τιμή των μετρήσεων δεν ισούται με την πραγματική τιμή αλλά αποκλίνει κατά  $\Delta x$

Στην περίπτωση αυτή δεν κερδίζουμε πολλά πράγματα με το να επαναλαμβάνουμε την μέτρηση. Θα πρέπει να επιχειρήσουμε τον προσδιορισμό, με κάποιον άλλο ανεξάρτητο τρόπο, του μεγέθους  $\Delta x$  και να διορθώσουμε την μέτρησή μας. Επειδή όμως πρόκειται για εκτίμηση της παραμέτρου  $\Delta x$ , θα συμπεριφέρεται ως τυχαία μεταβλητή. Με ποίο τρόπο θα επιτελέσουμε αυτή την διόρθωση.

Ας υποθέσουμε ότι η μέτρηση του φυσικού μεγέθους  $X$ ,  $x$ , πάσχει και από συστηματικά σφάλματα. Θα θεωρήσουμε ότι η μέτρηση αποτελείται από δύο μέρη. Ένα τυχαίο,  $x^R$ , με σφάλμα  $\sigma$ , και ένα συστηματικό,  $x^S$ , με σφάλμα  $s$ . Θα έχουμε δηλαδή ότι  $x = x^R + x^S$ . Συνεπώς η συνολική διασπορά των μετρήσεων θα ισούται με:

$$\begin{aligned} V(x) &= V(x^S + x^R) = E[(x_S + x_R)^2] - E^2[x_S + x_R] = \\ &= E[x_S^2 + x_R^2 + 2x_S x_R] - (E(x_S) + E(x_R))^2 = \\ &= E(x_S^2) + E(x_R^2) + E(2x_S x_R) - E^2(x_S) - E^2(x_R) - 2E(x_S)E(x_R) = \\ &= V(x^S) + V(x^R) \end{aligned} \quad 2.7.1$$

**Ερώτηση:** Αποδείξτε την τελευταία ισότητα στη 2.7.1, χρησιμοποιώντας το επιχείρημα ότι τα  $x^S$  και  $x^R$  είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Βρείτε την αναμενόμενη τιμή του  $x$ .

**Υπόδειξη:** Η συνδιασπορά των ποσοτήτων  $x^S$  και  $x^R$  ισούται με μηδέν.

Σύμφωνα λοιπόν με την 2.7.1, **τα δύο είδη σφαλμάτων μπορούν να προστεθούν σε τετραγωνική μορφή.  $\sigma_{\text{tot}}^2 = \sigma^2 + s^2$**

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, θέλουμε να συνδυάσουμε δύο μετρήσεις  $x_1$  και  $x_2$ , οι οποίες έχουν ένα κοινό συστηματικό σφάλμα ( $s$ ) και τυχαία σφάλματα  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ . Τότε μπορούμε να γράψουμε :

$$x_1 = x_1^R + x_1^S, \quad x_2 = x_2^R + x_2^S.$$

Προφανώς θα ισχύει ότι  $V(x_1) = \sigma_1^2 + s^2$  και  $V(x_2) = \sigma_2^2 + s^2$ .

Η συνδιασπορά των δύο μεταβλητών,  $x_1$  και  $x_2$ , θα είναι:

$$\begin{aligned}
\text{cov}(x_1, x_2) &= E(x_1 x_2) - E(x_1)E(x_2) \\
&= E[(x_1^R + x_1^S)(x_2^R + x_2^S)] - E(x_1^R + x_1^S)E(x_2^R + x_2^S) \\
&= E(x_1^R x_2^R) + E(x_1^R x_2^S) + E(x_1^S x_2^R) + E(x_1^S x_2^S) - E(x_1^R)E(x_2^R) - E(x_1^R)E(x_2^S) - E(x_1^S)E(x_2^R) - E(x_1^S)E(x_2^S) \\
&= E(x_1^S x_2^S) - E(x_1^S)E(x_2^S) = \text{cov}(x_1^S, x_2^S) = V(s) = s^2
\end{aligned}$$

Γενικεύοντας, ο πίνακας συνδιασποράς μπορεί να γραφεί  $V = \begin{pmatrix} \sigma^2 + s^2 & s^2 \\ s^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}$

Εξετάσαμε περιπτώσεις κατά τις οποίες τα συστηματικά σφάλματα είναι ανεξάρτητα των μετρήσεων. Ας δούμε την, περισσότερο ρεαλιστική, περίπτωση όπου τα σφάλματα είναι ανάλογα του αποτελέσματος της μέτρησης. Έστω δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές  $x_1$  και  $x_2$ , με τυχαία σφάλματα,  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  και συστηματικά σφάλματα  $s_1 = \varepsilon \cdot x_1$  και  $s_2 = \varepsilon \cdot x_2$  αντίστοιχα. Προφανώς θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1^R + x_1^S & x_2 &= x_2^R + x_2^S \\
V(x_1) &= \sigma_1^2 + \varepsilon^2 x_1^2 & V(x_2) &= \sigma_2^2 + \varepsilon^2 x_2^2
\end{aligned}$$

Επίσης εύκολα μπορεί να δείξουμε ότι:  $\text{cov}(x_1, x_2) = \text{cov}(x_1^S, x_2^S) = \varepsilon^2 x_1 x_2$

Τα αποτελέσματα αυτά, μπορούν εύκολα να γενικευθούν για την περίπτωση περισσότερων των δύο μετρήσεων.

### Παράδειγμα 2.7.1:

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος,  $I_1$ , που διαρρέει μία αντίσταση υπολογίζεται με την μέτρηση της διαφοράς δυναμικού  $V_1$  στα δύο άκρα της αντίστασης, μεγέθους  $R \pm \sigma_R$ , χρησιμοποιώντας ένα βολτόμετρο με διακριτική ικανότητα  $\sigma_{V1}$ . Ποίο είναι το σφάλμα στην μέτρηση του ρεύματος;

Γνωρίζουμε από το νόμο του Ohm ότι  $I = V/R$ . Επειδή τα  $V$  και  $R$  είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, καταλήγουμε ότι:

$$\sigma_{I1}^2 = \left( \frac{\partial \frac{V}{R}}{\partial V} \right)_{V_1}^2 \sigma_{V1}^2 + \left( \frac{\partial \frac{V}{R}}{\partial R} \right)_{V_1}^2 \sigma_R^2 = \frac{\sigma_{V1}^2}{R^2} + \frac{V_1^2}{R^4} \sigma_R^2 \Rightarrow \frac{\sigma_{I1}^2}{I_1^2} = \frac{\sigma_{V1}^2}{V_1^2} + \frac{\sigma_R^2}{R^2}$$

Η ίδια συνδεσμολογία χρησιμοποιείται και για την μέτρηση της έντασης του ρεύματος,  $I_2$ , όταν η διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης είναι  $V_2 \pm \sigma_{V_2}$ .

Τα σφάλματα στο ρεύμα  $I_2$ , θα δίνεται από την σχέση:  $\frac{\sigma_{I_2}^2}{I_2^2} = \frac{\sigma_{V_2}^2}{V_2^2} + \frac{\sigma_R^2}{R^2}$

Οι μετρήσεις των δύο ρευμάτων θα έχουν μία μη μηδενική συνδιασπορά, επειδή χρησιμοποιήθηκε η ίδια αντίσταση, που ισούται με:

$$\text{cov}(I_1, I_2) = \frac{\partial I_1}{\partial R} \frac{\partial I_2}{\partial R} \sigma_R^2 = \frac{I_1 I_2}{R^2} \sigma_R^2$$

**Πρόβλημα** Να εξετάσετε την περίπτωση, όπου οι δύο μετρήσεις έχουν ανεξάρτητα συστηματικά σφάλματα  $s_1$  και  $s_2$  αντίστοιχα.

### Πρόβλημα 2.6.3

Θεωρείστε τρεις μεταβλητές  $x_1, x_2, x_3$  και ας υποτεθεί ότι εκτός από τα τυχαία σφάλματα  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , έχουν ένα κοινό συστηματικό σφάλμα  $s$  και επί πλέον άλλο ένα ανεξάρτητο συστηματικό σφάλμα  $T$  από το οποίο πάσχουν τα  $x_1, x_2$  αλλά όχι το  $x_3$ .

Αποδείξτε ότι ο πίνακας συνδιασποράς είναι:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 + s^2 + T^2 & s^2 + T^2 & s^2 \\ s^2 + T^2 & \sigma_2^2 + s^2 + T^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 & \sigma_3^2 + s^2 \end{pmatrix}$$