ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Ειδικές Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας

3.1 Εισαγωγή

Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας ή οι συναρτήσεις πιθανότητας (στην περίπτωση τυχαίων μεταβλητών με διακριτό φάσμα τιμών) που συνήθως συναντούμε στις πρακτικές εφαρμογές μπορούν να προσεγγιστούν ικανοποιητικά με απλές συναρτησιακές σχέσεις. Σ΄ αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με αυτές τις «ιδανικές» συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και θα συζητήσουμε παραδείγματα εφαρμογών στην περιγραφή καί ανάλυση πειραματικών δεδομένων.

3.2 Διωνυμική συνάρτηση πιθανότητας

Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε στον αέρα ένα νόμισμα. Η πιθανότητα να πέσει «κορώνα» είναι p=½, και να πέσει «γράμματα» είναι q=1-p= ½. Πώς θα μπορούσαμε να γράψουμε την συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X η οποία παίρνει την τιμή x=1 όταν το νόμισμα έρθει «κορώνα» και την τιμή x=0 όταν το νόμισμα έρθει «γράμματα»;

Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσετε ότι η ακόλουθη σχέση[1]:

$$f(x;p) = p^{x} \cdot (1-p)^{1-x} \qquad 3.2.1$$

εκφράζει πλήρως την πιθανότητα έκβασης του πειράματος και ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων κάθε πιθανής έκβασης είναι ίσο με τη μονάδα.

Ερώτηση: Δείξετε ότι για κάθε έκβαση (δηλαδή x=0 ή x=1) η σχέση 3.2.1 αντιστοιχίζει την σωστή πιθανότητα και ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων, f(1,;p)+f(0;p), ισούται με την μονάδα.

Ας ρίξουμε τώρα 10 νομίσματα. Ποία είναι η πιθανότητα μόνο 3 από αυτά να έρθουν κορώνα ;

Η απάντηση προβλέπεται από την **διωνυμική συνάρτηση πιθανότητας** και είναι:

$$\frac{10!}{3!\cdot 7!}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{7} \qquad !!!!$$

Η διωνυμική συνάρτηση πιθανότητας εκφράζει με την σχέση 3.2.2 την πιθανότητα να έχουμε ακριβώς r επιτυχίες σε N δοκιμές, όταν η πιθανότητα επιτυχίας, σε κάθε δοκιμή, είναι σταθερή και ίση με p.

$$\mathbf{P(r;N,p) = \binom{N}{r} p^{r} (1-p)^{N-r}} \qquad \mathbf{3.2.2}$$

όπου r και N είναι θετικοί ακέραιοι και p είναι πραγματικός αριθμός στο διάστημα 0 ≤ p ≤ 1.

[1] Η σχέση 3.2.1 συνήθως καλείται, τύπος δοκιμών του Bernoulli

Η έκφραση $\binom{N}{r}$ στο δεξιό μέλος της 3.2.2 είναι ο αριθμός των τρόπων να διαλέξουμε r επιτυχίες από N δοκιμές και ισούται κατά τα γνωστά με: $\binom{N}{r} = \dfrac{N!}{r!\cdot(N-r)!}$

Η διωνυμική συνάρτηση πιθανότητας έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

Αναμενόμενη τιμή: $$E(r) = \sum_{r=0}^{\infty} rP(r;N,p) = Np \qquad 3.2.3$$

Διασπορά: $$V(r) = \sum_{r=0}^{\infty} (Np - r)^2 P(r) = Np(1-p) \qquad 3.2.4$$

Ασυμμετρία: $$!_1 = \frac{1 - 2\cdot p}{n\cdot p\cdot(1-p)} \qquad 3.2.5$$

Κύρτωση: $$!_2 = \frac{1 - 6\cdot p\cdot(1-p)}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}} \qquad 3.2.6$$

Χαρακτηριστική συνάρτηση: $$!(t) = \left[p\cdot e^{it} + (1-p)\right]^n \qquad 3.2.7$$

Ερώτηση: Αποδείξετε την σχέση 3.2.3

Υπόδειξη:

$$E(r) = \sum_{r=0}^{\infty} rP(r;N,p) = \sum_{r=0}^{\infty} r\cdot\frac{N!}{r!\cdot(N-r)!}\cdot p^r(1-p)^{N-r} = \sum_{r=1}^{\infty} r\cdot\frac{N!}{r!\cdot(N-r)!}\cdot p^r(1-p)^{N-r}$$

$$= N\cdot p\cdot \underbrace{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(N-1)!}{(r-1)!\cdot(N-r)!}\cdot p^{r-1}(1-p)^{N-r}}_{\sum_{l=0}^{\infty} P(l;M,p)=1 \quad l=r-1,\ M=N-1} = N\cdot p$$

Παράδειγμα 3.2.1:

Σε μία συστοιχία ανιχνευτών φορτισμένων σωματιδίων χρησιμοποιούμε τρείς ανιχνευτές. Η αποδοτικότητα του κάθε ανιχνευτή είναι 95%, αλλά χρειαζόμαστε αποκρίσεις και από τους τρεις ανιχνευτές συγχρόνως για να είμαστε βέβαιοι ότι ένα σωματίδιο πέρασε δια μέσου της ανιχνευτικής συστοιχίας. Ποία είναι η συνολική αποδοτικότητα του συστήματος ;

Εφαρμόζοντας την σχέση 3.2.2 βρίσκουμε ότι:

$$P(3) = \binom{3}{3}\cdot 0.95^3\cdot(1-0.95)^0 = 0.95^3 = 0.857$$

Ποία θα είναι η αποδοτικότητα του συστήματος εάν χρησιμοποιήσουμε τέσσαρους ανιχνευτές και ζητούσαμε οι τρεις από αυτούς να δίνουν θετική απόκριση ;

Προφανώς:

$$\binom{4}{3}\cdot 0.95^3\cdot(1-0.95)^1 + \binom{4}{4}\cdot 0.95^4\cdot(1-0.95)^0 = 0.986$$

Παράδειγμα 3.2.2:

Ας υποθέσουμε ότι παριστούμε την συχνότητα εμφάνισης των τιμών μίας μέτρησης, x, με ένα ιστόγραμμα. Θα καλούμε «επιτυχία» την περίπτωση όπου η τιμή του x αντιστοιχεί στον ιστό(bin) j και «αποτυχία» όταν αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε άλλο bin. Το πλήθος γεγονότων ,r, στον ιστό j ενός ιστογράμματος που περιέχει N συνολικά γεγονότα είναι και αυτή τυχαία μεταβλητή με διωνυμική συνάρτηση πιθανότητας.

Η πιθανότητα p_j για μία επιτυχία, ισούται με το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής x, πάνω στο διάστημα τιμών του x που αντιστοιχεί ο ιστός j.

Η πιθανότητα να βρούμε r μετρήσεις στον ιστό j δίνεται από την δυωνυμική κατανομή 3.2.2, με $p=p_j$, με αναμενόμενη τιμή την $E(r) = N p_j$ και τετραγωνική διασπορά $V(r) = N p_j (1-p_j)$

Όταν ο ιστός αντιστοιχεί σε μικρή περιοχή τιμών της μεταβλητής x, η πιθανότητα να αυξηθεί το πλήθος γεγονότων σ΄ αυτό τον ιστό είναι αρκετά μικρότερος της μονάδας, $p_j<<1$, ώστε η διασπορά να μπορεί να γραφεί ως:

$V(r) = \sigma^2 = N p_j (1-p_j) \approx N p_j \approx E(r) \approx r$

Παράδειγμα 3.1.3:[2]

Η Μαριάνθη - μία μορφωμένη, μοντέρνα και προπαντώς «καπάτσα», νεαρή κυρία – αφού μελέτησε τις απαραίτητες ανθρωπολογικές εργασίες, κατέληξε ότι, μόνο ένας στους χίλιους σημερινούς άνδρες μπορεί να κριθεί κατάλληλος– για τις ανάγκες της και για την προσωπικότητά της – μέλλων σύζυγος. Το ερώτημα που έθεσε, αμέσως μετά, στον εαυτό της ήταν:

«Μαριάνθη!! πόσους άνδρες πρέπει να δοκιμάσεις για να έχεις τουλάχιστον 99% πιθανότητα να βρείς τον άνδρα που σου ταιριάζει ;»

Για να αποφύγει απλουστεύσεις, έθεσε p την πιθανότητα ότι σε μία τυχαία επιλογή μπορεί να επιλέξει τον κατάλληλο σύντροφο και αποφάσισε να συμβολίζει με α την επιζητούμενη πιθανότητα (δηλαδή 99%) να βρει τον σύζυγο μετά τις απαραίτητες, N δοκιμές.

Μετά έκαμε τους ακόλουθους συλλογισμούς.

Έστω x ο αριθμός των κατάλληλων ανδρων που θα βρεί σε N δοκιμές. Οι συνθήκες επέβαλλαν:

- Η πιθανότητα ώστε σε N δοκιμές, να βρει τουλάχιστον έναν σύζυγο θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από α: $P(x \geq 1) \geq !$
- Η πιθανότητα ώστε, να μη βρει σύζυγο μετά από N δοκιμές θα πρέπει να είναι μικρότερη από: $P(x = 0) \leq 1 - !$

Μετά εφάρμοσε την διωνυμική κατανομή και συνέχισε ως εξής:

[2] Η ίδια μέθοδος ανάλυσης, είναι εφαρμόσιμη σε κάθε πείραμα που σχεδιάζεται για την μελέτη σπάνιων φαινομένων.

$$P(x=0) \le 1-\alpha \text{ ή } \binom{N}{0} p^0 (1-p)^N \le 1-\alpha$$

$$(1-p)^N \le 1-\alpha \quad \text{ή} \quad \ln(1-p)^N \le \ln(1-\alpha)$$

$$N \ge \ln(1-\alpha)/\ln(1-p)$$

Με αγωνία αντικατέστησε: p=0.001 και α=0.99.
«Περισσότερους από 4603!!!» αναφώνησε, και βιάστηκε να καλέσει στο τηλέφωνο τον αριθμό για γνωριμίες.

3.3 Πολυωνυμική συνάρτηση πιθανότητας

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος ρίχνει ένα ζάρι. Ας υποθέσουμε επίσης ότι, για κατασκευαστικούς λόγους, κάθε δυνατή έκβαση (1, 2, 3, 4, 5, 6) έχει διαφορετική πιθανότητα. Ας καλέσουμε με p_i (i=1,2,…,6) την πιθανότητα μία ρίψη να καταλήξει σε κάθε ένα από τα δυνατά αποτελέσματα. Ποια είναι η πιθανότητα μετά από, συνολικά, N ρίψεις τα αποτελέσματα να έχουν ως εξής: r_1 φορές το ζάρι έφερε 1, r_2 φορές το ζάρι έφερε 2, r_3 φορές το ζάρι έφερε 3, r_4 φορές το ζάρι έφερε 4, r_5 φορές το ζάρι έφερε 5 και r_6 φορές το ζάρι έφερε 6 ;

Η απάντηση είναι: $\frac{N!}{r_1!!r_2!!r_3!!r_4!!r_5!!r_6!} ! p_1^{r_1} ! p_2^{r_2} ! p_3^{r_3} ! p_4^{r_4} ! p_5^{r_5} ! p_6^{r_6}$

Η γενίκευση της διωνυμικής συνάρτησης πιθανότητας για την περίπτωση πειράματος με περισσότερα από δύο δυνατά αποτελέσματα λέγεται πολυωνυμική (multonomial) συνάρτηση πιθανότητας και εκφράζεται από την σχέση 3.3.1

$$\mathbf{P(r_1, r_2, \ldots, r_k) = \frac{N!}{r_1!r_2!\ldots.r_k!} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots.p_k^{r_k} = N! \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{r_i}}{r_i!}} \qquad \mathbf{3.3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{k} r_i = N$$

Η αναμενόμενη τιμή, η διασπορά και η συνδιασπορά των τυχαίων μεταβλητών r_i (i=1,2,…k) δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E(r_i) = Np_i \qquad V(r_i) = Np_i(1-p_i)$$
$$\mathrm{cov}(r_i, r_j) = Np_i p_j \qquad 3.3.2$$

Κλασικό παράδειγμα τυχαίων μεταβλητών με πολυωνυμική συνάρτηση πιθανότητας αποτελούν οι πληθυσμοί γεγονότων στους ιστούς ενός ιστογράμματος.

Θα πρέπει να παρατηρήσετε ότι σύμφωνα με την σχέση 3.3.2, οι πληθυσμοί των γεγονότων των ιστών δεν είναι αμοιβαία ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Η εξάρτηση επιβάλλεται από το γεγονός ότι ο συνολικός αριθμός των γεγονότων είναι δεδομένος, ώστε το άθροισμα των τυχαίων μεταβλητών r_i να ισούται με N.

Όπως φαίνεται στις ασκήσεις αξιολόγησης είναι δυνατόν να αποφύγουμε αυτή την αμοιβαία εξάρτηση εάν ο συνολικός αριθμός γεγονότων θεωρηθεί και αυτός τυχαία μεταβλητή. Στην περίπτωση αυτή όμως η κοινή συνάρτηση πιθανότητας των μεταβλητών ri δεν είναι πολυωνυμική αλλά γινόμενο από Poissonians (βλέπε επόμενη υποενότητα)

Πρόβλημα
Έστω οι τυχαίες μεταβλητές X και Y με δυωνυμικές συναρτήσεις πιθανότητας. Δείξετε ότι η τυχαία μεταβλητή Z+X+Y έχι και αυτή δυωνυμική συνάρτηση πιθανότητας.

Υπάρχει η προκατάληψη[3] ότι όταν πέφτει στο έδαφος μία βουτυρωμένη φέτα ψωμί θα καταλήξει με το βούτυρο στο έδαφος. Προκειμένου να ελεγχθεί η υπόθεση το πείραμα επαναλήφθηκε N φορές και παρατηρήθηκε ότι K φορές έπεσε με το βούτυρο στο έδαφος και M (=N-K) φορές. Να υπολογισθεί το σφάλμα στην μέτρηση του παράγοντα ασυμμετρίας: $r = \dfrac{K-M}{K+M}$

Δείξετε ότι όταν ο συνολικός αριθμός των γεγονότων που εισέρχονται σε ένα ιστόγραμμα είναι τυχαία μεταβλητή τότε η κοινή συνάρτηση πιθανότητας των πληθυσμών των ιστών είναι γινόμενο Poissonians.

[3] Δεν πρόκειται για προκατάληψη. Πράγματι λόγω ροπών πέφτει με το βούτυρο στο έδαφος. Το παράδειγμα αυτό έχει ευρύ φάσμα εφαρμογών σε μετρήσεις ασυμετρίας, π.χ. στην forward – backward ασυμμετρία λόγω πόλωσης κτλ

3.6 Ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ο χαρακτηρισμός «ομοιόμορφη» αναφέρεται στο γεγονός ότι η πυκνότητα πιθανότητας είναι , η ίδια, σταθερή σε όλο το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής.
Ο συναρτησιακός τύπος της ομοιόμορφής συνάρτησης πιθανότητας και οι βασικές ιδιότητές έχουν ως ακολούθως:

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad \text{για} \quad a \le x \le b \qquad 3.6.1$$

$$f(x)=0 \quad \text{για} \quad a > x \ \text{ή} \ x > b$$

Αναμενόμενη τιμή: $E(x)=(b-a)/2$ 3.6.2

Διασπορά: $V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$ 3.6.3

Καμπυλότητα: $\gamma_1=0$ 3.6.4

Κύρτωση: $\gamma_2=-1.2$ 3.6.5

Χαρακτηριστική συνάρτηση: $\phi(t)=\frac{\sinh\left(\frac{1}{2}it\cdot(b-a)\right)}{it\cdot(b-a)}+\frac{1}{2}it\cdot(b-a)$ 3.6.6

Ερώτηση: Αποδείξετε την σχέση 3.6.3.

Ερώτηση: Δείξετε ότι η συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας του αθροίσματος δύο τυχαίων μεταβλητών, με την ίδια ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, είναι τριγωνική συνάρτηση.
Υπόδειξη: Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές, X και Y, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την 3.6.1. Η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι: $g(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. Χρησιμοποιώντας τις νέες μεταβλητές $Z_1=X+Y$ και $Z_2=Y$ γράφουμε ότι: $g(z_1,z_2)=f(z_1-z_2)\cdot f(z_2)$. Προκειμένου να βρούμε την οριακή συνάρτηση $g_1(z_1)$ θα πρέπει να ολοκληρώσουμε διακρίνοντας τις περιπτώσεις:
α) $z_1<b$ και συνεπώς $a\le z_2<b$ και $a\le z_2-z_1<b$

$$\int_a^{z_1} f(z_1-z_2)\cdot f(z_2)dz_2=\frac{z_1-a}{(b-a)^2}=\frac{z_1-a+b-b}{(b-a)^2}=\frac{1}{b-a}+\frac{z_1-b}{(b-a)^2} \qquad 3.6.7$$

β) $z_1\ge b$. Προκειμένου $a\le z_2\le b$ $a\le z_2-z_1\le b$, το κάτω όριο ολοκλήρωσης θα πρέπει να είναι ίσο με z_1-b+a και το πάνω όριο ίσο με b. Ώστε:

$$\int_{z_1-b+a}^{b} f(z_1-z_2)\cdot f(z_2)dz_2=\frac{1}{b-a}-\frac{z_1-b}{(b-a)^2} \qquad 3.6.8$$

Οι δύο σχέσεις, 3.6.7 και 3.6.8, μπορούν να γραφούν υπό την κοινή μορφή:

$$g_1(z_1)=\frac{1}{b-a}-\frac{|z_1-b|}{(b-a)^2} \qquad a\le z_1\le a+2\cdot(b-a) \qquad 3.6.9$$

Συνήθως γράφουμε την τριγωνική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με την μορφή:

$$g(x)=\frac{1}{\sigma}-\frac{|x-\mu|}{\sigma^2} \qquad \mu-\sigma\le x\le\mu+\sigma \qquad 3.6.10$$

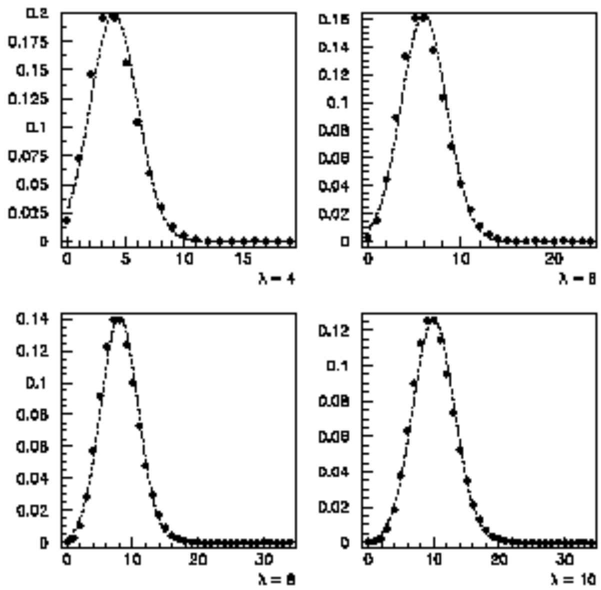
$$g(x)=0 \qquad \mu-\sigma > x \ \text{ή} \ x > \mu+\sigma$$

Εύκολα μπορείτε να επαληθεύσετε τα ακόλουθα χαρακτηριστικά της τριγωνικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας:
Αναμενόμενη τιμή: $E(x)=\mu$
Διασπορά: $\Gamma^2/6$
Καμπυλότητα: $\gamma_1=0$
Κύρτωση: $\gamma_2=-0.6$

3.7 Ασυμπτωτική συμπεριφορά κατανομών.

Ας θεωρήσουμε την κατανομή Poisson που δίνεται στην 3.4.4 Θέτοντας $r = \lambda+x$ (δηλαδή σημειώνουμε με x την απόκλιση από την μέση τιμή) και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση Stirling: $\ln(r!) \cong r\ln r - r + \ln\sqrt{2\pi r}$, μπορούμε να γράψουμε τον λογάριθμο της 3.4.4 ως:

$$\begin{aligned}\ln P(r;\lambda) &= \ln\left(\frac{\lambda^r \cdot e^{-\lambda}}{r!}\right) = -\lambda + r\cdot\ln\lambda - \ln(r!) \cong -\lambda + r\cdot\ln\lambda - r\cdot\ln r + r - \ln\sqrt{2\pi r} \cong \\ &-\lambda + r(\ln\lambda - \ln r) + r - \ln\sqrt{2\pi r} \cong \\ &-\lambda + (\lambda + x)\left[\ln\lambda - \ln\left(\lambda\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)\right)\right] + (\lambda + x) - \ln\sqrt{2\pi r} \cong \\ &x - (\lambda + x)\ln\left(1+\frac{x}{\lambda}\right) - \ln\sqrt{2\pi r}\end{aligned} \qquad 3.7.1$$



Σχήμα 3.7.1: Σύγκριση της προσέγγισης με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας Gauss (συνεχείς γραμμές) με κατανομές Poisson, για διαφορετικές αναμενόμενες τιμές, λ.

Αναλύοντας στην συνέχεια τον όρο $\ln\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)$ της σχέσης 3.7.1, σε σειρά Taylor ($\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + O(z^3)$) καταλήγουμε (αγνοώντας όρους μεγαλύτερης της δευτέρας τάξης) ότι :

$$\ln P(r;\lambda) \cong x - (\lambda + x)\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{x^2}{2\lambda^2} + \dots\right) - \ln\sqrt{2\pi\lambda} \cong -\frac{x^2}{2\lambda} - \ln\sqrt{2\pi\lambda} \qquad 3.7.2$$

ή στην ισοδύναμη σχέση:

$$P(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{\frac{-x^2}{2\lambda}} \qquad 3.7.3$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση 3.7.3 ότι x=r-λ και ότι η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής r είναι μ=λ και η διασπορά είναι V(r) $=\sigma^2=\lambda$ (βλέπε ιδιότητες της Poissonian) καταλήγουμε ότι:

$$P(r) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(\mu-r)^2}{2\sigma^2}} \qquad 3.7.4$$

Προκειμένου να καταλήξουμε στην σχέση 3.7.4 υποθέσαμε ότι οι τιμές της μεταβλητής r, είναι πολύ μεγαλύτερες της μονάδας (ώστε να ισχύει ο τύπος του Stirling) και ότι η απόκλιση από την μέση τιμή της μεταβλητής r είναι σχετικά μικρή (ώστε να αγνοήσουμε όρους $x^k=(\lambda-r)^k$
για k>2).
Δείξαμε λοιπόν, ότι στην περίπτωση όπου ο αριθμός των συμβάντων, r, είναι μεγάλος και ότι η αναμενόμενη τιμή είναι μεγάλη (r-λ είναι μικρό) η συνάρτηση πιθανότητας Poisson ουσιαστικά συμπίπτει με Gaussian, όπως επιδεικνύεται γραφικά και στο Σχήμα 3.7.1).

Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα εξετάζοντας τις συνέπειες του θεωρήματος του κεντρικού ορίου για την περίπτωση τυχαίων μεταβλητών με συνάρτηση πιθανότητας Poisson. Πράγματι, ο παρατηρούμενος αριθμός συμβάντων είναι το άθροισμα r ανεξαρτήτων συμβάντων με πιθανότητα κάθε ένα να συμβεί ίση με p. Συνεπώς ικανοποιούνται οι βασικές προϋποθέσεις του θεωρήματος του κεντρικού ορίου και καθώς το r τείνει στο άπειρο θα πρέπει να κατανέμεται με Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Το γενικό συμπέρασμα, στο οποίο καταλήγουμε, είναι ότι πολλές από τις ευρέως χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις (πυκνότητας) πιθανότητας , όπως η διωνυμική, πολυωνυμική, Poisson, χ^2, Studnts-t, Fisher[3] κλπ, τείνουν ασυμπτωτικά προς την Gaussian καθώς ο αριθμός των εμπλεκομένων παρατηρούμενων συμβάντων τείνει στο άπειρο.
Βεβαίως, είναι λάθος να υποθέτουμε εκ των προτέρων, όπως θα δειχθεί στην επόμενη υποενότητα, ότι οι μετρήσεις, παρατηρήσεις ή εκτιμήσεις ενός φυσικού μεγέθους περιγράφονται από Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

[3] Στις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας , χ^2, Studnts-t, Fisher θα αναφερθούμε σε εδάφια των επόμενων κεφαλαίων.

3.8 Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των πειραματικών δεδομένων.

Οι συναρτησιακοί τύποι πυκνότητας πιθανότητας που αναφέρθησαν σ' αυτό το Κεφάλαιο δεν καλύπτουν επ΄ ουδενί το φάσμα συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στην Στατιστική Ανάλυση. Η επέκταση σε μία τέτοια περιγραφή ξεφεύγει από τους στόχους αυτού του συγγράμματος. Θα αναφερθούμε σε άλλους τύπους συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας σε επόμενα εδάφια, όταν θα ασχοληθούμε με την χρήση τους στην εκτίμηση παραμέτρων και τον έλεγχο υποθέσεων.

Επί πλέον θα πρέπει να σημειωθεί ότι η χρήση αυτών των «ιδανικών» συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας παρέχει την δυνατότητα περιγραφής πειραματικών δεδομένων σε ειδικές περιπτώσεις και υπό ειδικές προυποθέσεις, όταν π.χ. η συσκευή μέτρησης είναι σχετικά απλή. Σε περιπτώσεις όπου η διαδικασία μέτρησης είναι πολύπλοκη, η περιγραφή της πυκνότητας πιθανότητας των μετρήσεων και η σχέση τους με πραγματικές τιμές φυσικών παραμέτρων είναι σχεδόν αδύνατο να επιτευχθεί, έστω και προσεγγιστικά, με την χρήση απλών συναρτήσεων. Θα επανέλθουμε σ' αυτή την παρατήρηση στην υποενότητα 3.9.

Η αντίληψη ότι εφ όσον πρόκειται για μετρήσεις «δικαιούμεθα» να υποθέσουμε ότι η πυκνότητα πιθανότητας είναι Gaussian είναι λάθος. Επί παραδείγματι, όταν μετρούμε τον χρόνο ζωής βραχύβιων ραδιενεργών ισοτόπων, t, η συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας είναι εκθετικής μορφής:

$$f(t) = \frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda\cdot t} \quad \lambda > 0, \quad 0 \le t \qquad 3.8.1$$

έστω και εάν τα όργανα μέτρησης εισάγουν μηδενικό σφάλμα, διότι αυτό επιβάλλεται από βασικές αρχές.

Βεβαίως, τα πραγματικά όργανα μέτρησης συνεισφέρουν με επιπλέον στατιστικές διακυμάνσεις, ώστε ο μετρούμενος χρόνος να είναι το ακόλουθο άθροισμα:

$$t=t_1+t_2 \qquad 3.8.2$$

όπου η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής t_1 περιγράφεται από την σχέση 3.8.1 ενώ η τυχαία μεταβλητή t_2 έχει, συνήθως, Gaussian πυκνότητα πιθανότητας[4]. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του μετρούμενου μεγέθους t, είναι η συνέλιξη[5] της συνάρτησης 3.8.1 με την συνάρτηση που εκφράζει την διακριτική ικανότητα του οργάνου. Το αποτέλεσμα της συνέλιξης δεν θα είανι Gaussian συνάρτηση.

Σε πλήθος άλλων περιπτώσεων, ιδιαίτερα όταν ο στατιστικός χαρακτήρας του αποτελέσματος της μέτρησης οφείλεται σχεδόν αποκλειστικά στην διαδικασία μέτρησης, η Gaussian συνάρτηση προσεγγίζει ικανοποιητικά την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μετρήσεων. Πολλοί πειραματικοί ισχυρίζονται ότι έχουν το δικαίωμα να χρησιμοποιούν την Gaussian προσέγγιση σε κάθε περίπτωση, διότι πιστεύουν ότι είναι αποδεδειγμένο μαθηματικά ότι κάθε μέτρηση φυσικού μεγέθους πληροί τις προϋπόθεσες του θεωρήματος του κεντρικού ορίου. Παράλληλα, οι μαθηματικοί πιστεύουν ότι έχουν το δικαίωμα να χρησιμοποιούν την Gaussian προσέγγιση διότι η πρακτική εμπειρία των μαθηματικών έχει δείξει ότι για κάθε πρακτική εφαρμογή πληρούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής του θεωρήματος του κεντρικού ορίου. Αμφότεροι οι επιστημονικοί κλάδοι εκφράζουν μία ιδιαίτερη

---

[4] Πρόκειται για την συνάρτηση που εκφράζει την διακριτική ικανότητα του οργάνου.

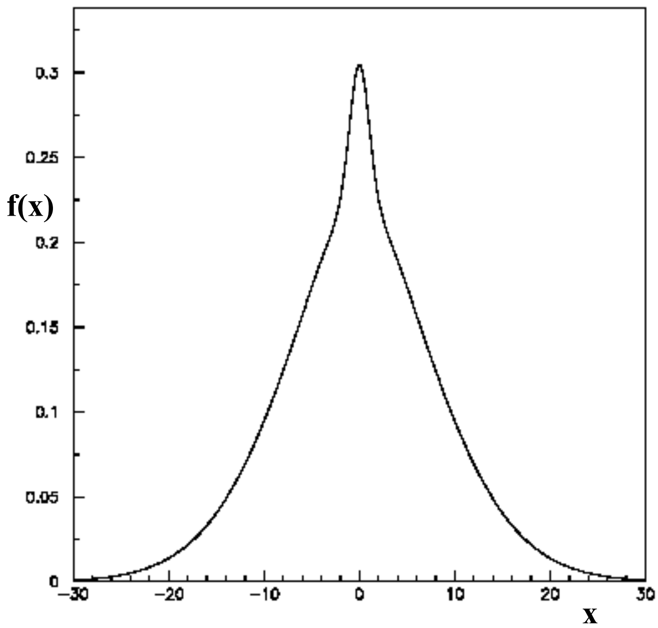
[5] Βλέπε στα επόμενα αυτής της υποενότητας.

προτίμηση στην Gaussian, λόγω των μοναδικών ιδιοτήτων της και της ευκολίας να καταλήγει κανείς σε συμπεράσματα.

Όπως είδαμε στην υποενότητα 2.4 ο μέσος όρος επαναλαμβανόμενων μετρήσεων περιγράφεται, κατά καλή προσέγγιση (που εξαρτάται από το πλήθος των μετρήσεων που χρησιμοποιούνται για τον μέσο όρο), από Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Επιπλέον, αυτή η ιδιότητα του μέσου όρου ισχύει ανεξάρτητα με το είδος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των μετρήσεων. Συνεπώς, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιεί κανείς τον μέσο όρο μετρήσεων παρά τις μετρήσεις αυτές καθ' εαυτές[6].

Αντιθέτως το άθροισμα Gaussian συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας, με την ίδια μέση τιμή, μ, αλλά με διαφορετικό σ δεν είναι Gaussian. Ας υποθέσουμε ότι τα αποτελέσματα των μετρήσεων μίας φυσικής ποσότητας, που συλλέγονται σε ένα πείραμα, ανήκουν σε Κ κατηγορίες[7]. Κάθε κατηγορία μετρήσεων περιγράφεται με Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με αναμενόμενη τιμή, μ, ίση με την πραγματική τιμή του φυσικού μεγέθους και διασπορά σ_i^2 (i=1,2,3,…K), $N(x;\mu,\sigma_i)$. Εάν επίσης θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα να πρόκυψη ένα αποτέλεσμα μέτρησης από την κατηγορία i είναι p_i , ($\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$) τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μετρήσεων είναι:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{K} p_i \cdot N(x;\mu,\sigma_i) \qquad 3.8.3$$



Σχήμα 3.8.1.: Άθροισμα πέντε Gaussian συναρτήσεων πυκνότητας με αναμενόμενη τιμή ίση με μηδέν και σ= 1., 3.5, 5., 7.5. και 10 .

---

[6] Επιπλέον το σφάλμα του μέσου όρου Ν μετρήσεων είναι κατά $N^{1/2}$ μικρότερο από το σφάλμα των μετρήσεων.

[7] Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μέτρηση της μάζας ενός σωματιδίου σε ένα πείραμα Υψηλών Ενεργειών. Η μάζα υπολογίζεται από την μέτρηση της ορμής, P, και της ενεργειάς , E , του σωματιδίου με την σχέση: $m=\frac{1}{c^2}\cdot\sqrt{E^2-P^2\cdot c^2}$. Επειδή τα σφάλματα στην μέτρηση της ορμής και της ενέργειας εξαρτώνται από την ορμή και την ενέργεια του σωματιδίου, σωμάτια του ιδίου τύπου (π.χ. μι.ονια) αλλά διαφορετικής ενέργειας θα πάσχουν από διαφορετικό σφάλμα στην μέτρηση της μάζας τους.

Η σχέση 3.8.3 δεν παριστά Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως φαίνεται χαρακτηριστικά και στο Σχήμα 3.8.1.

<u>**Συμπερασματικά:**</u> **Όταν εκπληρούνται οι κατάλληλες προϋποθέσεις, ώστε να μπορούμε να επικαλεσθούμε τις συνέπειες του θεωρήματος του Κεντρικού Ορίου, το άθροισμα αμοιβαία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών έχει κανονική (Gaussian) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Αντιθέτως, το άθροισμα κανονικών συναρτήσεων πιθανότητας δεν καταλήγει πάντοτε σε κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.**

Στις περιπτώσεις όπου, για διάφορους λόγους, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των πειραματικών μετρήσεων δεν μπορεί να προσεγγισθεί με Gaussian συνάρτηση, ούτε με κάποια άλλη των «ιδανικών» συναρτησιακών τύπων, επιζητούμε τρόπους εμπειρικής παραμετροποίησης των δεδομένων.
Οι οικογένειες συναρτήσεων Johnson παρέχουν αυτή την δυνατότητα και επιπλέον ορίζουν, μέσω ενός απλού μετασχηματισμού της μεταβλητής που εκφράζει το αποτέλεσμα της μέτρησης, μία νέα τυχαία μεταβλητή με κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Συγκεκριμένα, έστω ότι Χ είναι η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στις μετρήσεις κάποιας φυσικής ποσότητας και έστω Ζ μία άλλη τυχαία μεταβλητή με κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$R(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad 3.8.4$$

όπου οι μεταβλητές x και z συνδέονται με την ακόλουθη σχέση μετασχηματισμού:

$$z = \gamma + \eta \cdot g(x;\lambda,\varepsilon) \quad \text{με } \eta > 0,\ \lambda > 0 \quad \text{και} \quad -\infty < \gamma, \varepsilon < \infty \qquad 3.8.5$$

Ο Johnson προτείνει τρεις συναρτησιακούς τύπους για την συνάρτηση g(x;λ.ε), αναλόγως του πως είναι φραγμένη η τυχαία μεταβλητή Χ.

$$g(x;\lambda,\varepsilon) = g_1(x;\lambda,\varepsilon) = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right), \quad -\infty < x < \infty$$

$$g(x;\lambda,\varepsilon) = g_2(x;\lambda,\varepsilon) = \ln\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right), \quad x \geq \varepsilon \qquad 3.8.6$$

$$g(x;\lambda,\varepsilon) = g_3(x;\lambda,\varepsilon) = \ln\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda-(x-\varepsilon)}\right), \quad \varepsilon \leq x \leq \lambda + \varepsilon$$

Να αποδειχθεί ότι η πιθανότητα να έχουμε μία επιτυχία μετά από, ακριβώς, r δοκιμές όταν η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή είναι p, δίνεται από την λεγόμενη Γεωμετρική συνάρτηση πιθανότητας που ορίζεται με την σχέση: $P(r;p) = p \cdot (1-p)^{r-1}$

Να αποδειχθεί ότι η πιθανότητα να έχουμε m επιτυχίες μετά από, ακριβώς, r δοκιμές όταν η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή είναι p, δίνεται από την λεγόμενη αρνητική δυωνυμική (negative binomial) συνάρτηση πιθανότητας που ορίζεται με την σχέση: $P(r;m,p) = \binom{r-1}{m-1} \cdot p^m \cdot (1-p)^{r-m}$

Πρόβλημα 3.3.2: Αποδείξετε ότι η συνέλιξη δύο κατανομών Gauss είναι και αυτή Gauss.