

Κεφάλαιο 8

Εκτίμηση Διαστήματος Εμπιστοσύνης

Στα δύο προηγούμενα κεφάλαια συζητήθηκαν μέθοδοι για την εκτίμηση των αληθών τιμών άγνωστων παραμέτρων. Η εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης (confidence interval) αναφέρεται στον προσδιορισμό διαστήματος τιμών της παραμέτρου, $a \leq \theta \leq b$, με πιθανότητα το εν λόγω διάστημα να περιέχει την αληθή τιμή της παραμέτρου, θ_0 , ίσο με β .

Συνήθως εκφράζουμε αυτή την απαίτηση ως: «το διάστημα τιμών, $[a,b]$, της παραμέτρου, θ , έχει περιεχόμενο πιθανότητας β να περιέχει την αληθή τιμή της παραμέτρου». Στην ιδιωματική γλώσσα της πειραματικής φυσικής η έννοια του «διαστήματος εμπιστοσύνης» εκφράζεται ως «σφάλμα στον προσδιορισμό της παραμέτρου». Βεβαίως, για να είναι σαφές τι εννοούμε με σφάλμα θα πρέπει να δηλώνεται το περιεχόμενο πιθανότητας του διαστήματος εμπιστοσύνης. Συνήθως επιλέγεται $\beta=65\%$ ή $\beta=95.5\%$ και το αντίστοιχο σφάλμα καλείται σφάλμα μίας τυποποιημένης απόκλισης (standard deviation) ή σφάλμα δύο τυποποιημένων αποκλίσεων. Ωστόσο, η κοινή χρήση αυτών των όρων δημιουργεί παρερμηνείες διότι η αντιστοιχία του συγκεκριμένου περιεχομένου πιθανότητας σε τυποποιημένες αποκλίσεις είναι ορθή μόνο για την περίπτωση της κανονικής συνάρτησης πιθανότητας.

Σ' αυτό το Κεφάλαιο θα μας απασχολήσει....

8.1 Διάστημα εμπιστοσύνης.

Έστω μία μέτρηση, $x=t$ της φυσικής ποσότητας X . Η μέτρηση χαρακτηρίζεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x;\theta)$. Το περιεχόμενο πιθανότητας, β , ώστε η περιοχή τιμών, $[a,b]$, των μετρήσεων να περιλαμβάνει την συγκεκριμένη μέτρηση υπολογίζεται ως:

$$\beta = P(a \leq t \leq b) = \int_a^b f(x;\theta) dx \quad 8.1.1$$

Αν η συναρτησιακή μορφή της $f(x;\theta)$ και η αληθής τιμή της παραμέτρου, θ_0 , είναι γνωστές, η σχέση 8.1.1 προσφέρει την δυνατότητα υπολογισμού του περιεχομένου πιθανότητας, β , δεδομένων των a και b .

Αντιστρόφως, όταν η συναρτησιακή μορφή της $f(x;\theta)$ και η αληθής τιμή της παραμέτρου είναι γνωστές, η σχέση 8.1.1 προσφέρει την δυνατότητα προσδιορισμού ενός διαστήματος $[a,b]$ με περιεχόμενο πιθανότητας ίσο με β . Ωστόσο, θα βρει κανείς πολλά διαστήματα τιμών που ικανοποιούν την συνθήκη 8.1.1. Κατά περίπτωση, ορίζουμε το διάστημα εμπιστοσύνης με τρόπο ώστε να διευκολύνει τη χρήση των αποτελεσμάτων μας. Συνήθως ορίζουμε «κεντρικά διαστήματα εμπιστοσύνης», δηλαδή απαιτούμε την ικανοποίηση των ακόλουθων συνθηκών:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^a f(x;\theta) dx &= \frac{1-\beta}{2} \\ \int_b^{\infty} f(x;\theta) dx &= \frac{1-\beta}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(a \leq t \leq b) = \int_a^b f(x;\theta) dx = \beta \quad 8.1.2$$

Στην περίπτωση όπου η αληθής τιμή της παραμέτρου, θ_0 , δεν είναι γνωστή θα πρέπει να ευρεθεί μια άλλη μεταβλητή, $z = z(x,\theta)$, η οποία να είναι συνάρτηση της μεταβλητής x και της παραμέτρου θ , τέτοια ώστε $f(x;\theta) = f^*(z)$. Στην περίπτωση όπου βρίσκεται μία τέτοια μεταβλητή, επιχειρείται η αναδιατύπωση του προβλήματος ως εξής:

Αναζητούμε την περιοχή τιμών $[z_1, z_2]$ της μεταβλητής z , που αντιστοιχεί σε περιεχόμενο πιθανότητας ίσο με β :

$$\beta = P(z_1 \leq z \leq z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f^*(z) dz \quad 8.1.3$$

Επειδή όμως η νέα μεταβλητή z είναι γνωστή συνάρτηση της μεταβλητής x και της παραμέτρου θ , μπορούμε (υπό κάποιες προϋποθέσεις) να βρούμε το αντίστοιχο διάστημα $[\theta_a(x), \theta_b(x)]$ ώστε :

$$\beta = P(\theta_a(x) \leq \theta \leq \theta_b(x)) \quad 8.1.4$$

Συνήθως καλούμε το διάστημα εμπιστοσύνης $[\theta_a(x), \theta_b(x)]$ ως «διάστημα εμπιστοσύνης στον χώρο της παραμέτρου».

Επισημαίνεται ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\theta_a(x)$ και $\theta_b(x)$ προσφέρουν την εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης για την μεταβλητή x και όχι για την παράμετρο θ , η οποία παραμένει άγνωστη. Επί παραδείγματι, όταν $\beta=0.95$ η σχέση 8.1.4 ερμηνεύεται ως: «Εάν η αληθής τιμή της παραμέτρου είναι θ τότε το 95% των μετρήσεων, x , της φυσικής ποσότητας X θα ικανοποιεί την σχέση: $\theta_a(x) \leq \theta \leq \theta_b(x)$ ». Αντίστροφα, η εκτίμηση του διαστήματος $[\theta_a(x), \theta_b(x)]$ από τα πειραματικά δεδομένα μας επιτρέπει να εκφράσουμε την, κατά 95%, εμπιστοσύνη μας ότι η αληθής τιμή της παραμέτρου ανήκει στο διάστημα αυτό.

Παράδειγμα 8.1.1

Ας θεωρήσουμε ότι η $f(x; \theta)$ είναι η κανονική συνάρτηση με γνωστές παραμέτρους μ και σ . Η πιθανότητα $P(a \leq t \leq b)$ ώστε μία μέτρηση, x , της ποσότητας X να έχει τιμή ίση με t είναι:

$$\begin{aligned} P(a \leq t \leq b) &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx \\ &= \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx - \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)} d\chi - \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)} d\chi \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad 8.1.5$$

Τα a και b προσδιορίζονται, για κάθε περιεχόμενο πιθανότητας β , θέτοντας την σχέση 8.1.5 ίση με β :

$$\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \beta$$

Ερώτηση: Ορίσετε το κεντρικό διάστημα $[a, b]$ με περιεχόμενο πιθανότητας ίσο με β

Υπόδειξη: Σύμφωνα με την 8.1.2 θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$$P(-\infty < t \leq a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx = \frac{1-\beta}{2}$$

$$P(b \leq t < \infty) = \int_b^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx = \frac{1-\beta}{2}$$

η άλλως

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)} d\chi &= \frac{1-\beta}{2} \\ 1 - \int_{-\infty}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)} d\chi &= \frac{1-\beta}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) &= \frac{1-\beta}{2} \\ 1 - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) &= \frac{1-\beta}{2} \end{aligned}$$

Όταν η παράμετρος μ δεν είναι γνωστή, αλλά είναι γνωστή η παράμετρος σ , ορίζουμε την νέα μεταβλητή: $z = z(x, \mu) = (x - \mu)/\sigma$. Στην περίπτωση αυτή, η συνθήκη που εξασφαλίζει στο διάστημα $[a, b]$ περιεχόμενο πιθανότητας ίσο με β , είναι η ακόλουθη:

$$P(a \leq t \leq b) = \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \beta \quad 8.1.6$$

Με μία απλή αλλαγή των μεταβλητών $b - \mu = d$, $a - \mu = c$, η σχέση 8.1.6 γράφεται:

$$P(\mu + c \leq t \leq \mu + d) = \Phi\left(\frac{d}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) = \beta \quad \text{ή}$$

$$P(t - d \leq \mu \leq t - c) = \Phi\left(\frac{d}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) = \beta \quad 8.1.7$$

Υπενθυμίζεται ότι το διάστημα εμπιστοσύνης που εκφράζει η σχέση 8.1.7 αφορά στην τυχαία μεταβλητή x και όχι στην αληθή τιμή της παραμέτρου. Ωστόσο, μία μέτρηση, t , της τιμής της φυσικής ποσότητας X μας επιτρέπει να είμαστε σίγουροι, κατά β , ότι η αληθής τιμή της παραμέτρου μ βρίσκεται στο διάστημα $[t - d, t - c]$.

Παράδειγμα 8.1.2

Το παράδειγμα 8.1.1 αποτελεί τη βάση για την εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης παραμέτρων κατ' αναλογία της εκτίμησης της τιμής της παραμέτρου. Θεωρήσετε ότι διατίθενται οι μετρήσεις $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ του φυσικού μεγέθους Ξ . Ας υποθέσουμε ότι κάθε μέτρηση χαρακτηρίζεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(\xi; \phi)$ και ότι ϕ είναι άγνωστη παράμετρος. Η τιμή της παραμέτρου ϕ εκτιμάται με τον εκτιμητή X (π.χ. μέγιστη πιθανοφάνεια) και έστω ότι η εκτίμηση, $\hat{\phi}$, κατανέμεται¹ σύμφωνα με κανονική συνάρτηση πιθανότητας με διασπορά ίση με σ^2 . Το πρόβλημα, σ' αυτή την περίπτωση, ανάγεται στον προσδιορισμό άνω και κάτω ορίων σε μία περιοχή τιμών της παραμέτρου ϕ ώστε το περιεχόμενο πιθανότητας αυτής της περιοχής να είναι β .

Χρησιμοποιώντας την σχέση 8.1.7 για τις ποσότητες:

$$\left. \begin{array}{l} t \rightarrow \hat{\phi} \\ x \rightarrow \xi \\ \mu \rightarrow \phi_0 \end{array} \right\} \quad z(x; \mu) = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow z(\hat{\phi}; \phi_0) = \frac{\hat{\phi} - \phi_0}{\sigma} \quad 8.1.8$$

¹ Πράγματι, όταν το πλήθος των πειραματικών μετρήσεων είναι μεγάλο η εκτίμηση με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας χαρακτηρίζονται από κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με

$$\sigma^2 \approx \frac{-1}{\frac{\partial^2 \ln L(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N; \theta)}{\partial \theta^2}}$$

καταλήγουμε ότι: $P(\hat{\phi} - d \leq \phi_0 \leq \hat{\phi} - c) = \Phi\left(\frac{d}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) = \beta$

Εάν απαιτήσουμε επιπλέον το κεντρικό διάστημα εμπιστοσύνης, καταλήγουμε στον ορισμό των ορίων ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} P(\hat{\phi} - d \geq \phi_0) &= \frac{1-\beta}{2} = \int_{-\infty}^{\frac{d}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ P(\phi_0 \geq \hat{\phi} - c) &= \frac{1-\beta}{2} = \int_{\frac{c}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned} \right\} \quad 8.1.9$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\beta}{2} = \int_0^{\frac{d}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad 8.1.10$$

$$\frac{\beta}{2} = \int_0^{\frac{c}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Λόγω της συμμετρίας της κανονικής συνάρτησης: $c = -d = \varepsilon_\beta$. Συνεπώς, μετά από μία εκτίμηση, $\hat{\phi}$, της τιμής της παραμέτρου, μπορούμε να εκφράσουμε την εμπιστοσύνη μας ότι, κατά β (π.χ. $\beta=95\%$), η αληθής τιμή, ϕ_0 , ευρίσκεται στο διάστημα $[\hat{\phi} - \varepsilon_\beta, \hat{\phi} + \varepsilon_\beta]$

8.2 Περιοχές εμπιστοσύνης σε εκτιμήσεις πολλών παραμέτρων

Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας εξαρτάται από k παραμέτρους, οι τιμές των οποίων εκτιμώνται από τα πειραματικά δεδομένα, επιδιώκουμε τον προσδιορισμό περιοχών τιμών των παραμέτρων με περιεχόμενο πιθανότητας ίσο με β .

Τα παραδείγματα της προηγούμενης υποενότητας ανέδειξαν την πρακτική σημασία της κανονικής συνάρτησης στην εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης. Οι ασυμπτωτικές ιδιότητες των συνήθων μεθόδων εκτίμησης εγγυώνται ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων κατανέμονται σύμφωνα με κανονική συνάρτηση πιθανότητας.

Έστω οι εκτιμήσεις $\hat{\theta}_i$ των τιμών των παραμέτρων θ_i ($i=1,2,3,\dots,k$) οι οποίες κατανέμονται σύμφωνα με την κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(\underline{\hat{\theta}}; \underline{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \cdot |\mathbf{V}_\theta|^{1/2}} e^{\left(-\frac{1}{2}(\underline{\hat{\theta}} - \underline{\theta})^T \cdot \mathbf{V}_\theta^{-1} \cdot (\underline{\hat{\theta}} - \underline{\theta})\right)} \quad 8.2.1$$

όπου $\underline{\theta}^T = (\theta_1, \theta_2, K, \theta_k)^T$, $\hat{\underline{\theta}}^T = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, K, \hat{\theta}_k)^T$ και ο πίνακας V_{θ} είναι ο πίνακας συνδιασποράς των εκτιμήσεων $\hat{\theta}_i$.

Από την σχέση 8.2.1 επάγεται ότι η ποσότητα :

$$Q^2(\hat{\underline{\theta}}; \underline{\theta}) = (\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta})^T \cdot V_{\theta}^{-1} \cdot (\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}) \quad 8.2.2$$

χαρκτηρίζεται από $\chi^2 (P_{\chi^2}(Q^2; k) : (Q^2)^{\frac{k-2}{2}} \cdot e^{-\frac{Q^2}{2}})$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για k βαθμούς ελευθερίας, ανεξάρτητα των μεταβλητών $\underline{\theta}$.

Συνεπώς, η περιοχή εμπιστοσύνης μπορεί να ορισθεί, κατ' ανάλογο τρόπο της μεθόδου που περιγράφηκε στην υποενότητα 8.1, ως:

$$P(Q^2(\hat{\underline{\theta}}; \underline{\theta}) \leq K_{\beta}^2) = \int_0^{K_{\beta}^2} P_{\chi^2}(Q^2; k) dQ^2 = \beta \quad 8.2.3$$

Δηλαδή, η περιοχή τιμών των εκτιμήσεων ορίζεται ως η περιοχή (υπερελλειψοειδής),

$$Q^2(\hat{\underline{\theta}}; \underline{\theta}) \leq K_{\beta}^2 \quad 8.2.4$$

στο χώρο των εκτιμήσεων των παραμέτρων, για την οποία το περιεχόμενο πιθανότητας $(\int_0^{K_{\beta}^2} P_{\chi^2}(Q^2; k) dQ^2)$ ισούται με β .

Παράδειγμα 8.2.1

Για απλότητα ας θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των πειραματικών δεδομένων εξαρτάται από δύο μόνο παραμέτρους, θ_1 και θ_2 . Έστω $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ οι εκτιμήσεις των παραμέτρων από τα πειραματικά δεδομένα με πίνακα συνδιασποράς:

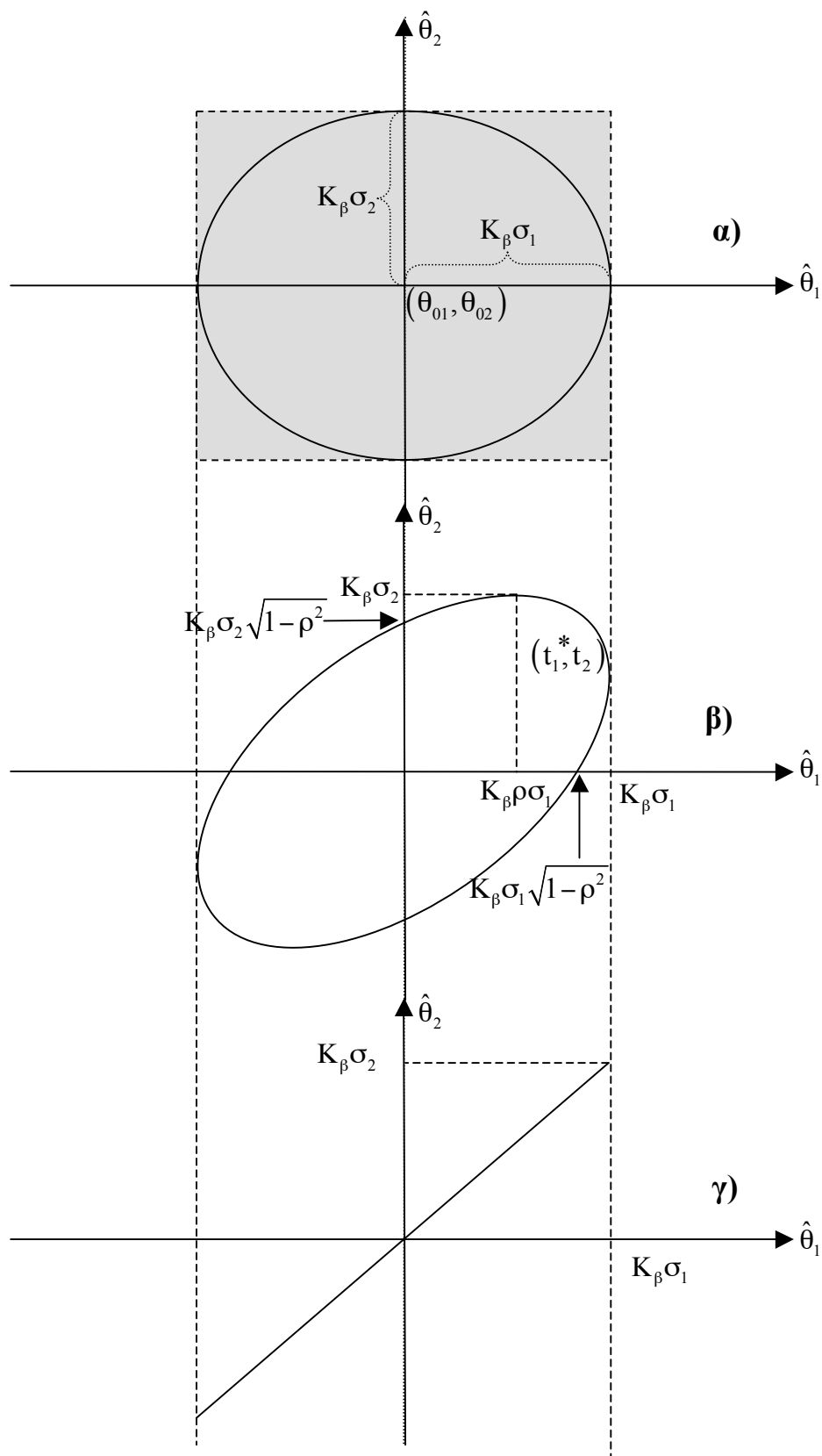
$$V_{\theta} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ \rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad 8.2.5$$

και έστω θ_{01} και θ_{02} οι αληθείς τιμές των παραμέτρων.

Στο Σχήμα 8.2.1 παρίστανται οι περιοχές εμπιστοσύνης, στο χώρο των εκτιμήσεων, όπως προκύπτουν από την συνθήκη 8.2.4, για τρεις διαφορετικές τιμές του συντελεστή συσχέτισης ρ : α) $\rho=0$, β) $0 < \rho < 1$ και γ) $\rho=1$.

Η ποσότητα K_{β} προσδιορίζεται από την σχέση 8.2.3 για δύο βαθμούς ελευθερίας και δεδομένης της τιμής του περιεχομένου πιθανότητας, β . Επισημαίνεται ότι η αρχή των αξόνων αντιστοιχεί στις αληθείς τιμές των παραμέτρων.

Παρατηρήστε ότι ακόμα και στην περίπτωση όπου οι εκτιμήσεις είναι αμοιβαία ανεξάρτητες ($\rho=0$, Σχήμα 8.2.1.α) η περιοχή εμπιστοσύνης παρίσταται από έλλειψη και όχι από ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 8.2.1: Περιοχές εμπιστοσύνης για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων, $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, για διαφορετικές τιμές του συντελεστή συσχέτισης: α) $\rho=0$, β) $0<\rho<1$ και γ) $\rho=1$

Στην περίπτωση όπου θα ήθελε κάποιος να αγνοήσει την συσχέτιση μεταξύ των εκτιμήσεων και να εκφράσει ανεξάρτητα διαστήματα εμπιστοσύνης για κάθε παράμετρο ανεξάρτητα, της μορφής:

$$\theta_{01} - K_{\beta} \cdot \sigma_1 \leq \hat{\theta}_1 \leq \theta_{01} + K_{\beta} \cdot \sigma_1 \quad 8.2.6$$

$$\theta_{02} - K_{\beta} \cdot \sigma_2 \leq \hat{\theta}_2 \leq \theta_{02} + K_{\beta} \cdot \sigma_2$$

Η περιοχή εμπιστοσύνης εκφράζεται από το εσωτερικό τετραπλεύρου, όπως το γραμμοσκιασμένο τετράπλευρο του Σχήματος 8.2.1.α.

Εκμεταλλευόμενοι την συμμετρία της σχέσης 8.2.2 ως προς $\hat{\theta}$ και $\underline{\theta}$ μπορούμε να εκφράσουμε περιοχές για τις αληθείς τιμές των παραμέτρων, με επίπεδο εμπιστοσύνης ίσο με β . Μία εκτίμηση των παραμέτρων, $\hat{\theta} = \underline{t}$, και του πίνακα συνδιασποράς, $\hat{V}_{\theta}$, από τα πειραματικά δεδομένα, ορίζει, στο χώρο των παραμέτρων, το υπερελλειψοειδές:

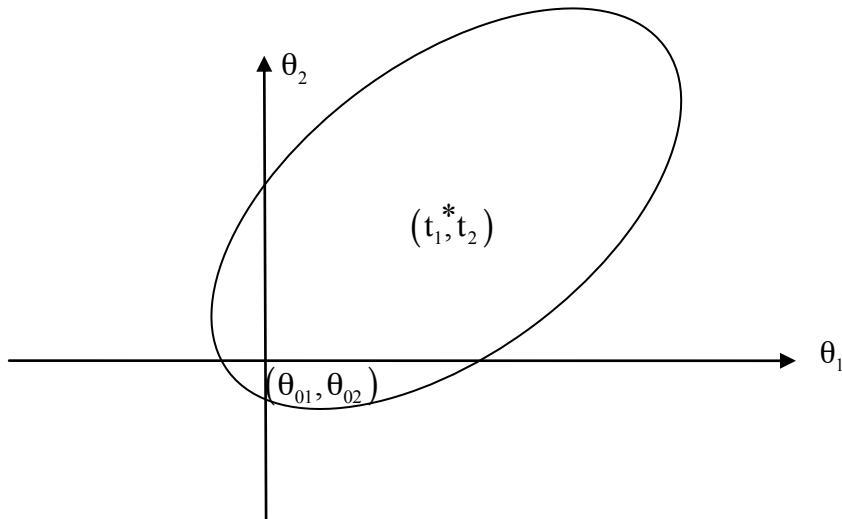
$$\hat{Q}^2(\underline{t}; \underline{\theta}) = (\underline{t} - \underline{\theta})^T \cdot \hat{V}_{\theta}^{-1} \cdot (\underline{t} - \underline{\theta}) \leq K_{\beta}^2 \quad 8.2.7$$

με την βοήθεια της σχέσης:

$$P(\hat{Q}^2(\underline{t}; \underline{\theta}) \leq K_{\beta}^2) = \int_0^{K_{\beta}^2} P_{\chi^2}(Q^2; k) dQ^2 = \beta \quad 8.2.8$$

Μπορεί κανείς να εμπιστευθεί, κατά β , την περιοχή τιμών των παραμέτρων που ορίζεται από την σχέση 8.2.7, ότι περιέχει τις αληθείς τιμές.

Παράδειγμα 8.2.2



Σχήμα 8.2.2: Γραφική αναπαράσταση της περιοχής εμπιστοσύνης για τις αληθείς τιμές των παραμέτρων. Η αντίστοιχη περιοχή εμπιστοσύνης για τις εκτιμήσεις παρίσταται γραφικά στο Σχήμα 8.2.1.β

Συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι, $\hat{\theta}_1 = t_1$ και $\hat{\theta}_2 = t_2$ είναι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων. Έστω επίσης ότι:

$\hat{V}_{\%} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \hat{\rho} \cdot \hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\rho} \cdot \hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2 & \hat{\sigma}_2^2 \end{pmatrix}$ είναι η εκτίμηση του πίνακα συνδιασποράς τους. Η εκτίμηση παρίσταται γραφικά ως σημείο στο Σχήμα 8.2.1.β.

Η περιοχή εμπιστοσύνης στο χώρο των τιμών των παραμέτρων παρίσταται γραφικά στο Σχήμα 8.2.2 όπου σημειώνεται επίσης το σημείο που αντιστοιχεί στην εκτίμηση καθώς και η αληθής τιμή των παραμέτρων.

8.3 Ζώνες εμπιστοσύνης

Έστω ότι $\underline{x}$ είναι μετρήσεις της φυσικής ποσότητας X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\underline{x}; \theta)$, όπου θ είναι άγνωστη παράμετρος. Έστω επίσης ότι $t = t(\underline{x})$ είναι η εκτίμηση της τιμής της παραμέτρου θ από τα πειραματικά δεδομένα. Θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκτίμησης εκφράζεται από την συνάρτηση $g(t; \theta)$.

Εάν η αληθής τιμή της παραμέτρου θ ήταν γνωστή, έστω ίση με θ_0 , το διάστημα εμπιστοσύνης με περιεχόμενο πιθανότητας β ορίζεται από σχέση αντίστοιχη της 8.1.1 ή από σχέσεις αντίστοιχες της 8.1.2, στην περίπτωση κεντρικών διαστημάτων, ως:

$$P(t_1 \leq t \leq t_2) = \beta$$

$$\int_{-\infty}^{t_1} g(t; \theta) dt = \frac{1-\beta}{2} = \int_{t_2}^{\infty} g(t; \theta) dt \quad 8.3.1$$

Όταν η αληθής τιμή της παραμέτρου θ δεν είναι γνωστή, ο άμεσος προσδιορισμός ορίων στο διάστημα εμπιστοσύνης, από τις σχέσεις 8.3.1, δεν είναι εφικτός. Επιπλέον, η μέθοδος που αναπτύχθηκε στις υποενότητες 8.3.1 και 8.3.2, ισχύει με την προϋπόθεση ότι υπάρχει δυνατότητα μετασχηματισμού των παραμέτρων, $t \rightarrow z(t, \theta)$, ώστε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκτίμησης, $g(t; \theta) \rightarrow g'(z)$, να είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ .

Στην γενική περίπτωση, εφ' όσον είναι άγνωστη η αληθής τιμή της παραμέτρου, είναι δυνατόν να προσδιορισθούν τα όρια του διαστήματος εμπιστοσύνης για κάθε δυνατή τιμή της παραμέτρου θ , $[t_1, t_2] \rightarrow [t_1(\theta), t_2(\theta)]$, ως:

$$P(t_1(\theta) \leq t \leq t_2(\theta)) = \beta$$

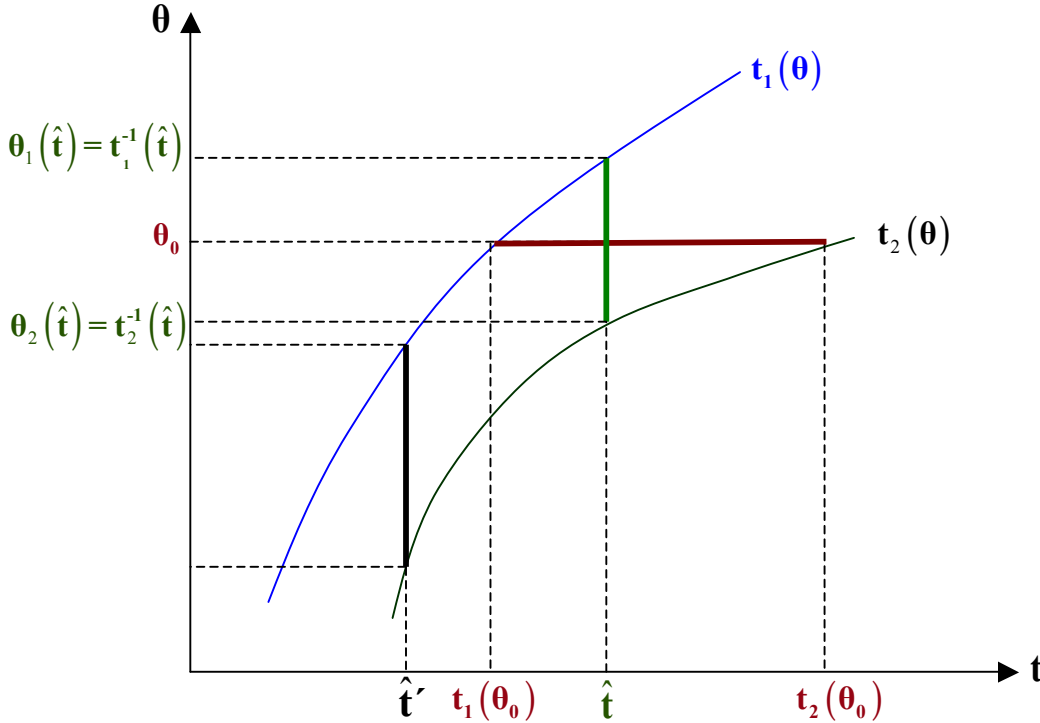
$$\int_{-\infty}^{t_1(\theta)} g(t; \theta) dt = \frac{1-\beta}{2} = \int_{t_2(\theta)}^{\infty} g(t; \theta) dt \quad 8.3.2$$

Στο Σχήμα 8.3.1 παρίστανται γραφικά οι καμπύλες $t_1(\theta)$ και $t_2(\theta)$, για κάποια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(t; \theta)$ και περιεχόμενο πιθανότητας β , οι οποίες ορίζουν μεταξύ τους ζώνη εμπιστοσύνης που αντιστοιχεί σε περιεχόμενο πιθανότητας β .

Πράγματι, εάν θ_0 είναι η αληθής τιμή της παραμέτρου, εύκολα ευρίσκει κανείς (π.χ. από την γραφική παράσταση του Σχήματος 8.3.1) τις τιμές $t_1(\theta_0)$ και $t_2(\theta_0)$ που ορίζουν τα όρια εμπιστοσύνης για το αποτέλεσμα της εκτίμησης, t , με επίπεδο εμπιστοσύνης β .

Αντίστροφα, έστω $\hat{t}$ το αποτέλεσμα μίας εκτίμησης. Η πιθανότητα να βρεθεί το αποτέλεσμα της εκτίμησης στο διάστημα $[t_1(\theta_0), t_2(\theta_0)]$ ισούται με β . Έστω τα όρια της περιοχής τιμών της παραμέτρου θ , $\theta_2(\hat{t}) \leq \theta \leq \theta_1(\hat{t})$, που προκύπτουν από τις αντίστροφες συναρτήσεις $t_1(\theta)$ και $t_2(\theta)$, για $t = \hat{t}$, ως²:

$$\begin{aligned}\theta_1(\hat{t}) &= t_1^{-1}(\hat{t}) \\ \theta_2(\hat{t}) &= t_2^{-1}(\hat{t})\end{aligned}\quad 8.3.3$$



Σχήμα 8.3.1: Γραφική αναπαράσταση ορισμού διαστήματος εμπιστοσύνης με την βοήθεια ζωνών εμπιστοσύνης

² Επισημαίνεται ότι το πάνω όριο για την τιμή της παραμέτρου θ ορίζεται από την καμπύλη που αντιστοιχεί στο κάτω όριο του αποτελέσματος της εκτίμησης, t .

Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς, με την βοήθεια του Σχήματος 8.3.1, ότι:

- Εάν το αποτέλεσμα της εκτίμησης $\hat{t}$ **ανήκει** στο διάστημα $[t_1(\theta_0), t_2(\theta_0)]$ τότε η περιοχή τιμών $[\theta_2(\hat{t}), \theta_1(\hat{t})]$ της παραμέτρου θ **εμπεριέχει** την αληθή τιμή της παραμέτρου, θ_0 .
- Εάν το αποτέλεσμα της εκτίμησης **δεν ανήκει** στο διάστημα $[t_1(\theta_0), t_2(\theta_0)]$, όπως η τιμή $\hat{t}'$ στο Σχήμα 8.3.1, τότε η περιοχή τιμών $[\theta_2(\hat{t}'), \theta_1(\hat{t}')]$ της παραμέτρου θ **δεν εμπεριέχει** την αληθή τιμή της παραμέτρου, θ_0 .

Βεβαίως, η αληθής τιμή της παραμέτρου είναι άγνωστη. Ωστόσο, ένα ποσοστό, ίσο με β , όλων των δυνατών αποτελεσμάτων της εκτίμησης³ της παραμέτρου θα ανήκει στο διάστημα $[t_1(\theta_0), t_2(\theta_0)]$. Συνεπώς, η πιθανότητα να εμπεριέχεται η αληθής τιμή της παραμέτρου, θ_0 , στο διάστημα τιμών $[\theta_2(\hat{t}), \theta_1(\hat{t})]$, το οποίο ορίζεται με την σχέση 8.3.3 από ένα οποιαδήποτε αποτέλεσμα της εκτίμησης, $\hat{t}$, θα είναι ίση με β .

Εν άλλους λόγους, το διάστημα τιμών $[\theta_2(\hat{t}), \theta_1(\hat{t})]$ αποτελεί διάστημα εμπιστοσύνης για την αληθή τιμή της παραμέτρου με περιεχόμενο πιθανότητας ίσο με β : $P(\theta_2(\hat{t}) \leq \theta_0 \leq \theta_1(\hat{t})) = \beta$

Παράδειγμα 8.3.1:

Ένας άλλος, ισοδύναμος, τρόπος καθορισμού του διαστήματος εμπιστοσύνης με την βοήθεια ζώνης εμπιστοσύνης, κάνει χρήση της συσσωρευτικής συνάρτησης πιθανότητας:

$$F(t; \theta) = \int_{-\infty}^t f(x; \theta) dx \quad 8.3.4$$

$$0 \leq F(t; \theta) \leq 1$$

για κάθε τιμή της παραμέτρου θ .

Δεδομένης ενός αποτελέσματος της εκτίμησης της παραμέτρου, $\hat{t}$, ορίζονται τα σημεία A και B, όπως δείχνει το Σχήμα 8.3.2, με συντεταγμένες $A = \left(\hat{t}, \frac{1-\beta}{2} \right)$ και $B = \left(\hat{t}, \frac{1+\beta}{2} \right)$, ώστε $\left| \overrightarrow{AB} \right| = \beta$. Στην συνέχεια αναζητούνται οι τιμές θ_1 και θ_2 της παραμέτρου θ για τις οποίες ισχύει ότι:

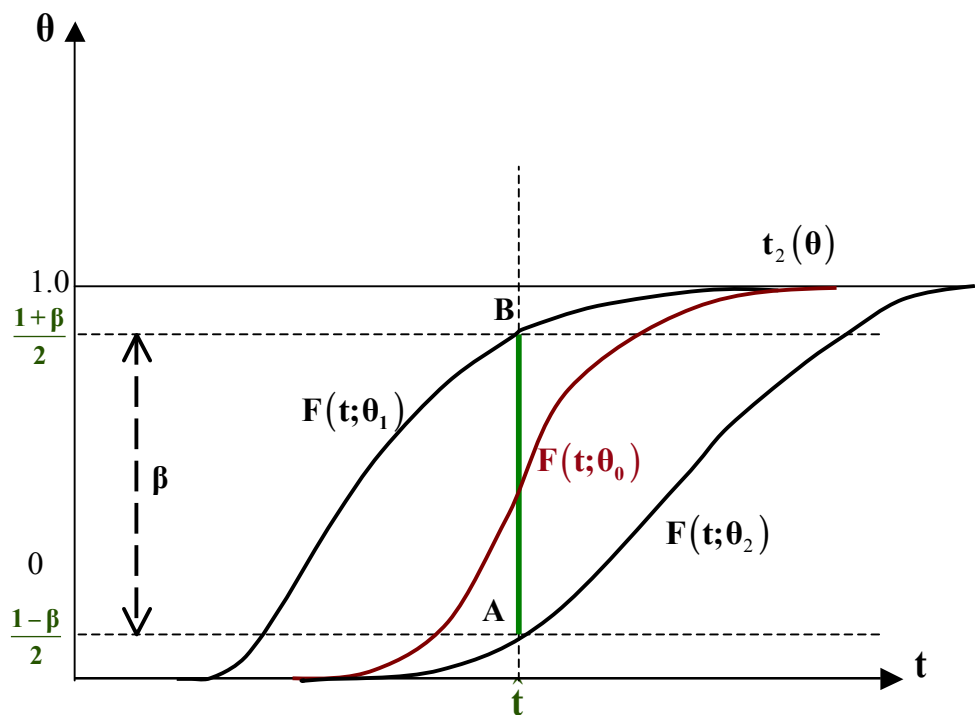
³ Επί παραδείγματι, έστω $n \rightarrow \infty$ πανομοιότυπα πειράματα που συλλέγουν N μετρήσεις το κάθε ένα και εκτιμούν την τιμή της φυσικής σταθεράς θ , με την ίδια μέθοδο εκτίμησης.

$$F(\hat{t}; \theta_1) = \int_{-\infty}^{\hat{t}} f(x; \theta_1) dx = \frac{1+\beta}{2}$$

8.3.5

$$F(\hat{t}; \theta_2) = \int_{-\infty}^{\hat{t}} f(x; \theta_2) dx = \frac{1-\beta}{2}$$

Το διάστημα εμπιστοσύνης $[\theta_2, \theta_1]$ της παραμέτρου θ έχει περιεχόμενο πιθανότητας β , υπό την έννοια ότι ένα ποσοστό β των αποτελεσμάτων της εκτίμησης θα καταλήξει σε διαστήματα εμπιστοσύνης τα οποία θα εμπεριέχουν την αληθή τιμή της παραμέτρου



Σχήμα 8.3.2: Γραφική αναπαράσταση ορισμού διαστήματος εμπιστοσύνης με την βοήθεια της συσσωρευτικής συνάρτησης πιθανότητας.

8.4. Όρια εμπιστοσύνης

Όπως ήδη ελέχθη, υπάρχουν άπειροι τρόποι να ορισθεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης. Συνήθως επιλέγονται συμμετρικά όρια αλλά υπάρχουν περιπτώσεις όπου είναι προτιμητέα τα μη κεντρικά όρια. Επί παραδείγματι, όταν κάποιος αναζητά πειραματική απόδειξη για την ύπαρξη

εξωτικών φυσικών καταστάσεων, ενδιαφέρεται να καθορίσει από τα πειραματικά δεδομένα «πάνω όρια» για τον ρυθμό παραγωγής τους. Εάν ο ρυθμός παραγωγής, σύμφωνα με την φυσική θεωρία που προβλέπει την ύπαρξη της εξωτικής κατάστασης, είναι ανάλογος της παραμέτρου θ , ενδιαφέρει το όριο, θ_1 , στην τιμή της παραμέτρου, ώστε:

$$P(\theta \leq \theta_1) = \beta \quad 8.4.1$$

Σ' άλλες περιπτώσεις έχει χρηστική αξία, ή είναι δυνατόν να ορισθεί από τα πειραματικά δεδομένα μόνο, το κάτω όριο της τιμής κάποιας φυσικής παραμέτρου.

$$P(\theta \geq \theta_2) = \beta \quad 8.4.2$$

Λόγου χάριν, τα νετρίνα έχουν μικρή μάζα. Από πειραματικά δεδομένα που συλλέγονται σε ένα πείραμα β διάσπασης του Τριτίου είναι δυνατόν να υπολογισθεί μόνο το κάτω όριο της μάζας του ηλεκτρονικού νετρίνο.

Ο καθορισμός των ορίων, 8.4.1 και 8.4.2, αποτελεί ειδική περίπτωση διαστήματος εμπιστοσύνης, όπου το πάνω ή το κάτω όριο του διαστήματος έχουν αντικατασταθεί με την μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή που δύναται να λάβει η παράμετρος.

Παράδειγμα 8.4.1

Συνήθως, αναζητούνται άνω ή κάτω όρια για την αναμενόμενη τιμή του πλήθους των παρατηρήσεων όταν τα πειραματικά δεδομένα συνίστανται από λίγες παρατηρήσεις. Στην περίπτωση αυτή το πλήθος των παρατηρήσεων περιγράφεται από Poisson συνάρτηση

$$\text{πιθανότητας: } \frac{\mu^n \cdot e^{-\mu}}{n!}$$

Τα όρια αντιστοιχούν στην εύρεση της μέγιστης (πάνω όριο), μ_+ , ή ελαχίστης (κάτω όριο), μ_- , τιμής της παραμέτρου μ , ώστε:

$$P(\mu \leq \mu_+) = \beta$$

$$8.4.3$$

$$P(\mu \geq \mu_-) = \beta$$

Εάν η αληθής τιμή της παραμέτρου, μ_0 , ήταν γνωστή τότε μπορεί να ορισθεί το διάστημα εμπιστοσύνης (n_1, ∞) , με περιεχόμενο πιθανότητας β , για το πλήθος των δεδομένων, r , ως:

$$P(r > n_1) = \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \frac{\mu_0^i \cdot e^{-\mu_0}}{i!} = \beta \quad 8.4.4$$

Επειδή η αληθής τιμή δεν είναι γνωστή, προσδιορίζεται το όριο n_1 για κάθε δυνατή τιμή της παραμέτρου μ , κατ' αναλογία της καμπύλης $t_1(\theta)$ του Σχήματος 8.3.1:

$$P(r > n_1) = \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \frac{\mu^i \cdot e^{-\mu}}{i!} = \beta \quad 8.4.5$$

Αντιστρόφως, εάν η αληθής τιμή μ_0 δεν είναι γνωστή και το πείραμα συνέλεξε r γεγονότα, η εκτίμηση της αληθούς τιμής της παραμέτρου μ καταλήγει στο αποτέλεσμα⁴: $\hat{\mu} = r$. Κατ' αντιστοιχία της μεθόδου που περιγράφηκε στην υποενότητα 8.3, το πάνω όριο για την αληθή τιμή της παραμέτρου ορίζεται από την σχέση 8.4.5, ως:

$$\begin{aligned}\beta &= P(\mu < \mu_+) \\ &= \sum_{i=\mu_++1}^{\infty} \frac{\mu_+^i \cdot e^{-\mu_+}}{i!} = \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\mu_+^i \cdot e^{-\mu_+}}{i!} \quad 8.4.6 \\ &= 1 - \sum_{i=0}^r \frac{\mu_+^i \cdot e^{-\mu_+}}{i!}\end{aligned}$$

Η σχέση 8.4.6 μπορεί να λυθεί εύκολα χρησιμοποιώντας την συσσωρευμένη $\chi^2(2 \cdot r + 1)$ συνάρτηση πιθανότητας, για $2r+1$ βαθμούς ελευθερίας:

$$\begin{aligned}P(\chi^2(2 \cdot r + 2) > 2z) &= \int_{2z}^{\infty} \chi^2(2 \cdot r + 2) d\chi^2 \\ &= \sum_{i=0}^r e^{-z} \cdot \frac{z^i}{i!}\end{aligned} \quad 8.4.7$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 8.4.6 και 8.4.7 καταλήγουμε ότι:

$$\begin{aligned}1 - \beta &= P(\chi^2(2 \cdot r + 2) > 2 \cdot \mu_+) \\ &= \sum_{i=0}^r e^{-\mu_+} \cdot \frac{\mu_+^i}{i!}\end{aligned} \quad 8.4.8$$

Κατ' αναλογία υπολογίζεται και το κατώτερο όριο, μ_- , για την αληθή τιμή της παραμέτρου μ , ως:

$$\begin{aligned}\beta &= \sum_{i=0}^{r-1} e^{-\mu_-} \cdot \frac{\mu_-^i}{i!} = P(\chi^2(2 \cdot r) > 2 \cdot \mu_-) \\ &= \int_{2 \cdot \mu_-}^{\infty} \chi^2(2 \cdot r) d\chi^2\end{aligned} \quad 8.4.9$$

⁴ Επειδή η συνάρτηση πιθανότητας είναι Poissonian, η εκτίμηση της μέσης τιμής ισούται με τον αριθμό των γεγονότων που παρατηρήθηκαν. Συνεπώς, οι σχέσεις 8.4.4 και 8.4.5 εκφράζουν όρια για την εκτίμηση, $\hat{\mu}$, της παραμέτρου μ .

Παράδειγμα 8.4.2.

Το 1987, η έκρηξη του υπερκενοφανούς (Super Nova) 1987A προσέφερε στους αστροφυσικούς τις απαραίτητες πειραματικές πληροφορίες για να θεμελιώσουν το θεωρητικό πρότυπο που περιγράφει τις φυσικές διεργασίες που συντελούνται στον αστέρα κατ' αυτή την κατακλυσμική έκρηξη. Είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακό το γεγονός ότι τόσα λίγα πειραματικά δεδομένα προσέφεραν τόσο μεγάλη δυνατότητα προώθησης της επιστημονικής γνώσης.

Η πειραματική πληροφορία, εκτός των άλλων, συνίστατο στην σύγχρονη ανίχνευση μερικών νετρίνων από (4) πειράματα καταμετρημένα στην γήινη σφαίρα. Η παρουσία ενός νετρίνων πιστοποιείται πειραματικά από τα ηλεκτρικά σήματα που παράγονται στην ανιχνευτική διάταξη από τα ηλεκτρικά φορτισμένα προϊόντα της αντίδρασής του νετρίνου με την ύλη που περιβάλλεται από τον ανιχνευτή. Βεβαίως, υπάρχουν και άλλοι φυσικοί μηχανισμοί που παράγουν τα ίδια πειραματικά σήματα, όπως η αλληλεπίδραση της φυσικής ραδιενεργού ακτινοβολίας με το υλικό του ανιχνευτή. Αυτοί οι μηχανισμοί υποστρώματος είναι αρκετά καλά γνωστοί, ώστε είναι δυνατόν να υπολογισθεί ο μέσος αναμενόμενος αριθμός, μ_B σημάτων υποστρώματος που αντιστοιχεί σε ένα χρονικό διάστημα Δt . Εάν στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt ανιχνεύονται r συνολικά γεγονότα είναι δυνατόν να καταλήξει κανείς σε συμπεράσματα που αφορούν στην ανίχνευση νετρίνων και στο πλήθος των νετρίνων που ανιχνεύθηκαν.

Το παράδειγμα της ανίχνευσης νετρίνων από το 1987A αποτελεί ειδική περίπτωση του προσδιορισμού ορίων στην αληθή μέση τιμή του σήματος (π.χ. μέση τιμή του πλήθους των νετρίνων που ανιχνεύθηκαν από την πειραματική διάταξη), το οποίο χαρακτηρίζεται από Poissonian συνάρτησης πιθανότητας, όταν το πλήθος των δεδομένων που ανιχνεύθηκαν είναι r και είναι επίσης γνωστό ότι ένας μηχανισμός υποστρώματος συνεισφέρει σε πειραματικά δεδομένα με αναμενόμενη τιμή μ_0 .

Εάν η αληθής μέση τιμή του σήματος είναι μ_0 , η πιθανότητα να ανιχνευθούν r γεγονότα δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} P(r; \mu_B, \mu_0) &= \sum_{i=1}^r \frac{\mu_B^{r-i} \cdot e^{-\mu_B}}{(r-i)!} \cdot \frac{\mu_0^i \cdot e^{-\mu_0}}{(i)!} \\ &= \frac{(\mu_B + \mu_0)^r \cdot e^{-(\mu_B + \mu_0)}}{(r)!} \end{aligned} \quad 8.4.10$$

Ερώτηση: Αποδείξτε την σχέση 8.4.10

Υπόδειξη: $(\mu_B + \mu_0)^r = (r!) \cdot \sum_{i=1}^r \frac{\mu_B^{r-i}}{(r-i)!} \cdot \frac{\mu_0^i}{(i)!}$

Από την 8.4.10 συνάγεται ότι το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό ορίων για την παράμετρο $(\mu_B + \mu)$, όταν η τιμή μ_B είναι γνωστή, υπό την προϋπόθεση ότι το πλήθος των γεγονότων υποστρώματος δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από τον συνολικό αριθμό, r , των πειραματικών δεδομένων.

Λόγω της δέσμευσης για το πλήθος του υποστρώματος δεν είναι σωστό να χρησιμοποιήσουμε την σχέση 8.4.6 μόνο με την απλή αντικατάσταση $\mu_+ \rightarrow \mu_+ + \mu_B$, διότι ο όρος

$\sum_{i=0}^r \frac{(\mu_+ + \mu_B)^i \cdot e^{-(\mu_+ + \mu_B)}}{i!}$ δεν περιέχει την συνθήκη δέσμευσης του πλήθους του υποστρώματος.

Αντ' αυτού θα πρέπει να επανακανονικοποιήσουμε (υπό συνθήκη πιθανότητα), ώστε να συμπεριληφθεί η συνθήκη για το υπόστρωμα, ως:

$$\begin{aligned} \beta &= P(\mu < \mu_+) \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=0}^r \frac{(\mu_+ + \mu_B)^i \cdot e^{-(\mu_+ + \mu_B)}}{i!}}{\sum_{i=0}^r \frac{(\mu_B)^i \cdot e^{-(\mu_B)}}{i!}} \end{aligned} \quad 8.4.11$$

8.5 Προσδιορισμός διαστήματος εμπιστοσύνης με τη συνάρτηση πιθανοφάνειας

Έστω ότι $\underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ είναι N μετρήσεις της φυσικής ποσότητας X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x, \theta)$, η οποία εξαρτάται από την παράμετρο θ . Έστω ότι $\hat{\theta}$ είναι το αποτέλεσμα της αληθούς τιμής της παραμέτρου που προέκυψε από την μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας.

Σ' αυτή την υποενότητα θα χρησιμοποιήσουμε τις ασυμπτωτικές ιδιότητες της συνάρτησης πιθανοφάνειας για τον προσδιορισμό διαστήματος εμπιστοσύνης για την αληθή τιμή της παραμέτρου θ .

8.5.1 Παραβολική συνάρτηση του λογαρίθμου της πιθανοφάνειας.

Στην υποενότητα 6.6 καταλήξαμε στην σχέση 6.6.9, η οποία εκφράζει τον λογάριθμο της συνάρτησης πιθανοφάνειας στη γειτονία της αληθούς τιμής της παραμέτρου, θ_0 , ως:

$$\left[\frac{\partial \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta=\hat{\theta}} = \left(\frac{\partial \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} + (\hat{\theta} - \theta_0) \left(\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta_0} = 0$$

Η σχέση 6.6.9 είναι συνέπεια της συνέπειας της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας καθώς το πλήθος των δεδομένων τείνει στο άπειρο.

Επίσης, όταν το πλήθος των δεδομένων τείνει στο άπειρο, με τη σχέση 6.6.13 δείξαμε ότι ισχύει:

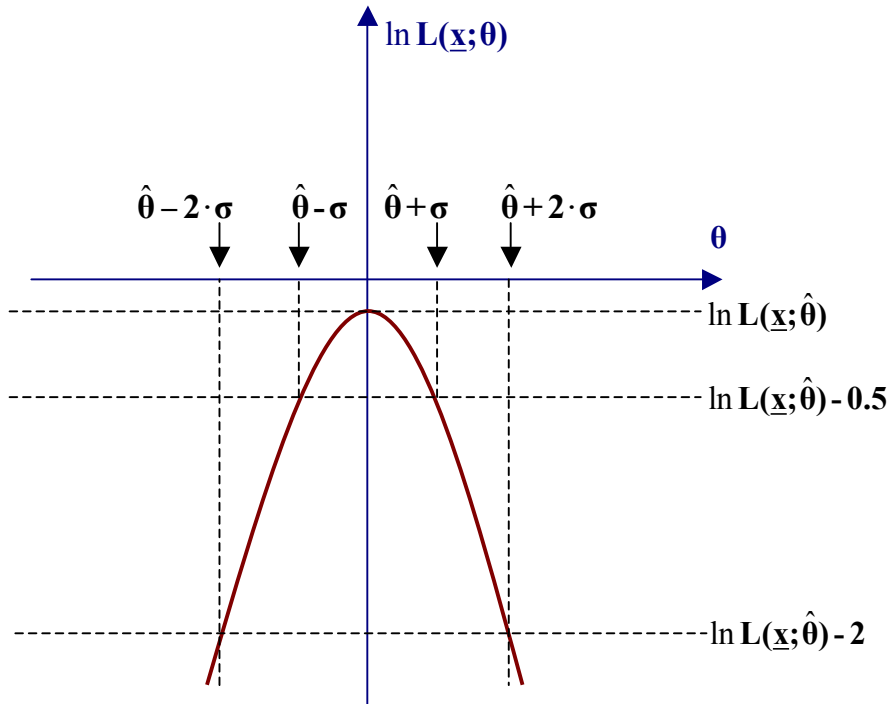
$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} = E \left(\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right)$$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις, ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας εκφράζεται ως παραβολική συνάρτηση της αληθούς τιμής της παραμέτρου.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} &= -(\hat{\theta} - \theta_0) \cdot \left(\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta_0} \\ &= -(\hat{\theta} - \theta_0) \cdot E \left[\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0} = -(\theta_0 - \hat{\theta}) \cdot E \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0} \end{aligned} \quad 8.5.1$$

$$\ln L(\underline{x}; \theta_0) = \frac{-(\theta_0 - \hat{\theta})^2}{2 \cdot E \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}^{-1}} + C$$

Ο όρος $E \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}^{-1}$ στην σχέση 8.5.1 εκφράζει την διασπορά του αποτελέσματος της εκτίμησης (βλέπε σχέση 6.6.14) όταν ο αριθμός των δεδομένων είναι αρκετά μεγάλος⁵.



Σχήμα 8.5.1: Γραφική παράσταση του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας και του προσδιορισμού της διασποράς του αποτελέσματος της εκτίμησης

⁵ Υπενθυμίζεται ότι στο ασυμπτωτικό όριο η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας καταλήγει σε εκτιμήσεις οι οποίες δεν πάσχουν από προκατάληψη και έχουν την μέγιστη ακρίβεια που επιτρέπει η ανισότητα των Cramer-Rao.

Επειδή η αληθής τιμή της παραμέτρου παραμένει πάντοτε άγνωστη, η σχέση 8.5.1 εκφράζει την τιμή του λογαρίθμου της πιθανοφάνειας για κάθε δυνατή (αληθή) τιμή της παραμέτρου θ , όταν $\hat{\theta}$ είναι μία συνεπής και χωρίς προκατάληψη εκτίμηση της αληθούς τιμής που προέκυψε με την μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας.

Η παραβολή 8.5.1 προσφέρει την δυνατότητα εύκολου υπολογισμού της διασποράς της εκτίμησης από τα πειραματικά δεδομένα και κατά συνέπεια τον προσδιορισμό διαστημάτων εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ .

Στο Σχήμα 8.5.1 παρίσταται γραφικά ο λογάριθμος της πιθανοφάνειας για κάθε δυνατή (αληθή) τιμή της παραμέτρου θ , για ένα σύνολο N μετρήσεων της ποσότητας X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x; \theta)$. Είναι προφανές, ότι η συνάρτηση $\ln L(\underline{x}; \theta)$ θα εμφανίζει μέγιστο για $\theta = \hat{\theta}$, με τιμή μέγιστου ίση με: $\ln L(\underline{x}; \hat{\theta})$.

Αναζητούνται οι τιμές της παραμέτρου θ για τις οποίες: $\ln L(\underline{x}; \hat{\theta}) - \ln L(\underline{x}; \theta) = 0.5$.

Λόγω της παραβολικής μορφής της συνάρτησης $\ln L(\underline{x}; \theta)$, υπάρχουν δύο τέτοιες τιμές, θ_1 και θ_2 , που προσδιορίζονται από την σχέση 8.5.1, ως:

$$0.5 = \frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{2 \cdot E \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}^{-1}} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \theta_1 = \hat{\theta} - \sigma \\ \theta_2 = \hat{\theta} + \sigma \end{array} \right\} \quad 8.5.2$$

$$\sigma = E \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}^{-1/2}$$

Αντιστρέφοντας την διαδικασία, προσδιορίζονται οι τιμές θ_1 και θ_2 της παραμέτρου, ως οι τετμημένες στην γραφική παράσταση του Σχήματος 8.5.1, όπου η τιμή της συνάρτησης $\ln L(\underline{x}; \theta)$ υπολείπεται της μέγιστης τιμής, $\ln L(\underline{x}; \hat{\theta})$, κατά 0.5. Ακολούθως η ποσότητα σ υπολογίζεται ως: $\sigma = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$.

Επισημαίνεται ότι η ποσότητα σ^2 είναι η διασπορά του αποτελέσματος της εκτίμησης και όχι η διασπορά της πραγματικής τιμής (η οποία έχει σταθερή τιμή που παραμένει άγνωστη). Ωστόσο, όπως δείξαμε στην υποενότητα 6.6, το αποτέλεσμα της εκτίμησης με την μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας κατανέμεται σύμφωνα με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας η οποία τείνει ασυμπτωτικά προς κανονική συνάρτηση⁶ με μέση τιμή την αληθή τιμή της

παραμέτρου και σ ίσο με: $\sigma = E \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}^{-1/2} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$

⁶ Το γεγονός ότι ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι παραβολικής μορφής συνεπάγεται ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του αποτελέσματος της εκτίμησης είναι κανονική συνάρτηση.

Συνεπώς, κατ' αντιστοιχία της μεθόδου που παρουσιάστηκε στα Παραδείγματα 8.1.1 και 8.1.2, το διάστημα εμπιστοσύνης για το αποτέλεσμα της εκτίμησης μετατρέπεται σε διάστημα εμπιστοσύνης για την αληθή τιμή της παραμέτρου.

Επί παραδείγματι, εάν το σ προσδιορίζεται γραφικά όπως παρίσταται στο Σχήμα 8.5.1, το

διάστημα τιμών $-\lambda_\beta \cdot \sigma \leq \hat{\theta} - \theta_0 \leq \lambda_\beta \cdot \sigma$ (όπου $\int_{-\lambda_\beta \sigma}^{\lambda_\beta \sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(\hat{\theta}-\theta_0)^2}{2\sigma^2}} d\hat{\theta} = \beta$) μετατρέπεται στο

ακόλουθο διάστημα εμπιστοσύνης για την αληθή τιμή της παραμέτρου θ :

$$P(\hat{\theta} - \lambda_\beta \cdot \sigma \leq \theta_0 \leq \hat{\theta} + \lambda_\beta \cdot \sigma) = \beta \quad 8.5.3$$

Παρατηρήστε ότι το διάστημα που εκφράζει η σχέση 8.5.3 μπορεί εύκολα να ευρεθεί από την τομή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\ln L(\underline{x}; \theta)$ με την ευθεία γραμμή $\ln L(\underline{x}; \theta) = Q$, όπου η τιμή της σταθεράς Q ευρίσκεται κατ' αντιστοιχία της σχέσης 8.5.2, ως:

$$Q = \frac{(\lambda_\beta \cdot \sigma)^2}{2 \cdot \sigma^2} = \frac{\lambda_\beta^2}{2} \quad 8.5.4$$

Ερώτηση: Βρείτε το κεντρικό διάστημα εμπιστοσύνης με περιεχόμενο πιθανότητας 68.3% για την παράμετρο θ , χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση του Σχήματος 8.5.1

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις 8.1.10 για να δείξετε ότι το διάστημα εμπιστοσύνης είναι $[\hat{\theta} - \sigma, \hat{\theta} + \sigma]$, όπου το σ ευρίσκεται με την μέθοδο που περιγράφει το Σχήμα 8.5.1.

Ερώτηση: Δείξτε ότι για να υπολογίσετε το κεντρικό διάστημα εμπιστοσύνης με περιεχόμενο πιθανότητας 95.5% για την παράμετρο θ , χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση του Σχήματος 8.5.1, θα αναζητήσετε τιμές τις παραμέτρου θ όπου $\ln L(\underline{x}; \hat{\theta}) - \ln L(\underline{x}; \theta) = 2$.

Υπόδειξη: Από τις σχέσεις 8.1.10 δείξτε ότι τα διάστημα εμπιστοσύνης θα πρέπει να έχει εύρος 4σ ($\pm 2\sigma$). Χρησιμοποιήστε την σχέση 8.5.1 για να δείξετε ότι η συνθήκη $\ln L(\underline{x}; \hat{\theta}) - \ln L(\underline{x}; \theta) = 2$ ορίζει αυτό το διάστημα.

Πράγματι, από την σχέση 8.5.1 συνάγεται ότι:

$$L(\underline{x}; \theta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot E \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}^{1/2}} \cdot e^{\frac{-(\theta_0 - t(\underline{x}))^2}{2 \cdot E \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}^{-1}}}, \text{ όπου } t(\underline{x}) \text{ είναι η}$$

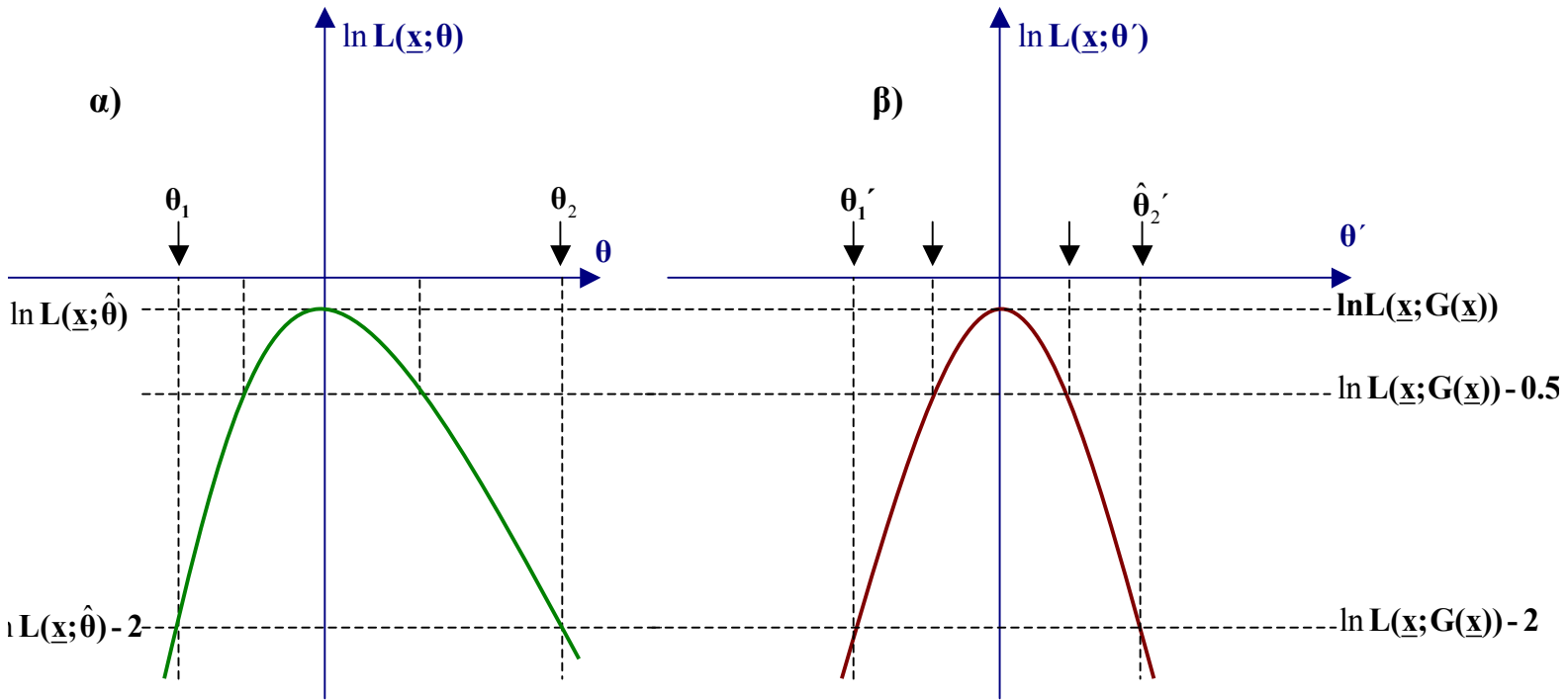
στατιστική συνάρτηση που εκφράζει την εκτίμηση $\hat{\theta}$ συναρτήσει των πειραματικών δεδομένων.

Συνεπώς η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του αποτελέσματος της εκτίμησης, $q(\hat{\theta}; \theta_0)$, θα περιγράφεται από την, επίσης κανονική, συνάρτηση:

$$q(\hat{\theta}; \theta_0) = \int \delta(\hat{\theta} - t(\underline{x})) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot E \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}^{1/2}} \cdot e^{\frac{-(\theta_0 - t(\underline{x}))^2}{2 \cdot E \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}^{-1}}} d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot E \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}^{1/2}} \cdot e^{\frac{-(\theta_0 - t(\underline{x}))^2}{2 \cdot E \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}^{-1}}}$$

8.5.2 Μη - παραβολική συνάρτηση του λογαρίθμου της πιθανοφάνειας.

Όταν ο αριθμός των πειραματικών δεδομένων είναι σχετικά μικρός η συνάρτηση πιθανοφάνειας (και κατά συνέπεια η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του αποτελέσματος της εκτίμησης) δεν είναι κανονική συνάρτηση.



Σχήμα 8.5.2: Γραφική παράσταση του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας και του προσδιορισμού της διασποράς του αποτελέσματος της εκτίμησης: α) μη παραβολική μορφή του λογαρίθμου πιθανοφάνειας, β) ο λογάριθμος πιθανοφάνειας εμφανίζει είναι παραβολική συνάρτηση της παραμέτρου $\theta' = g(\underline{x}, \theta)$

Μία τέτοια περίπτωση παρίσταται στο Σχήμα 8.5.2.α όπου ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας έχει ασυμμετρική, μη-παραβολική, μορφή. Στις περιπτώσεις αυτές, αναζητούμε ένα μετασχηματισμό, της μορφής:

$$\theta' = g(\underline{x}, \theta) \quad 8.5.3$$

ώστε η συνάρτηση πιθανοφάνειας να μετασχηματίζεται ως:

$$\begin{aligned} L(\underline{x}; \theta) &= L(\underline{x}; \theta') = L(\underline{x}; g(\underline{x}, \theta)) \\ &= \frac{(\theta' - G(\underline{x}))^2}{2} \end{aligned} \quad 8.5.4$$

Προφανώς, η εκτίμηση της παραμέτρου θ' με την μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας καταλήγει στο αποτέλεσμα: $\hat{\theta}' = G(\underline{x})$. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας, καθώς και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του αποτελέσματος της εκτίμησης, είναι κανονικές συναρτήσεις της παραμέτρου θ' , με $\sigma=1$.

Στο Σχήμα 8.5.2.β παρίσταται γραφικά ο προσδιορισμός διαστήματος εμπιστοσύνης με περιεχόμενο πιθανότητας $\beta=68.5\%$ και $\beta=95.5\%$, από την τομή των γραμμών:

$$\ln L(\underline{x}; \theta') = \ln L(\underline{x}; G(\underline{x})) - 0.5 \quad \text{και} \quad \ln L(\underline{x}; \theta') = \ln L(\underline{x}; G(\underline{x})) - 2$$

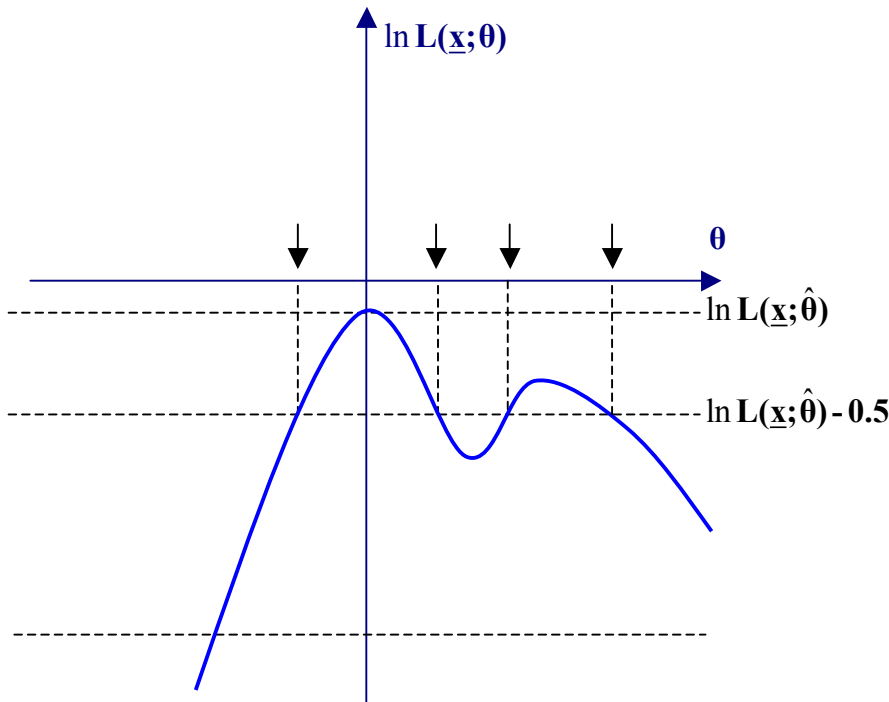
με την καμπύλη που παριστά τον λογάριθμο της πιθανοφάνειας συναρτήσει της παραμέτρου θ' .

Ειδικά για $\beta=95.5\%$ το διάστημα εμπιστοσύνης, $[\theta_1', \theta_2']$, θα είναι:

$$G(\underline{x}) - 2 \leq \theta' \leq G(\underline{x}) + 2 \quad 8.5.5$$

Προκειμένου να προσδιορισθεί το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ , παρατηρούμε ότι $\ln L(\underline{x}; \theta) = \ln L(\underline{x}; \theta')$ και επικαλούμεθα την ιδιότητα της αμεταβλητότητας⁷ (invariance) των εκτιμητών μεγίστης πιθανοφάνειας:

$$g(\underline{x}, \hat{\theta}) = \hat{g}(\underline{x}, \theta) = G(\underline{x}).$$



Σχήμα 8.5.3: Γραφική παράσταση του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση πιθανοφάνειας εμφανίζει δύο μέγιστα.

⁷ Εάν $\hat{\theta}$ είναι εκτίμηση της παραμέτρου θ τότε $\tau(\hat{\theta})$ είναι εκτίμηση της τιμής της συνάρτησης $\tau(\theta)$.

Συγκεκριμένα, επειδή $\ln L(\underline{x}; \theta) = \ln L(\underline{x}; g(\underline{x}, \theta)) = \ln L(\underline{x}; \theta')$, το διάστημα εμπιστοσύνης $[\theta_1, \theta_2]$, για τις τιμές της παραμέτρου θ , το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα εμπιστοσύνης $[\theta'_1, \theta'_2]$ της παραμέτρου θ' , ορίζεται από τα σημεία τομής της ευθείας γραμμής:

$$Q(\theta) = \ln L(\underline{x}; \hat{\theta}) - 2$$

με την καμπύλη $y(\theta) = \ln L(\underline{x}; \theta)$, που παριστά τον λογάριθμο της πιθανοφάνειας συναρτήσει της παραμέτρου θ .

Επισημαίνεται ότι, ενώ το διάστημα εμπιστοσύνης που αντιστοιχεί στις τιμές της παραμέτρου θ' είναι συμμετρικό ως προς το αποτέλεσμα της εκτίμησης, $\hat{\theta}' = G(\underline{x})$, το διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ δεν είναι πλέον κεντρικό.

Ωστόσο, υπάρχουν παθολογικές περιπτώσεις όπου η συνάρτηση πιθανοφάνειας εμφανίζει περισσότερα από ένα μέγιστα, όπως φαίνεται παραστατικά στο Σχήμα 8.5.3. Στις περιπτώσεις αυτές δεν είναι πλέον δυνατόν να ορισθεί ένα διάστημα τιμών της παραμέτρου με περιεχόμενο πιθανότητας β και η έννοια του διαστήματος εμπιστοσύνης δεν περιγράφει ασφαλώς τα αποτελέσματα.

8.5.3 Προσεγγιστική εφαρμογή των ασυμπτωτικών ιδιοτήτων της πιθανοφάνειας

Στην υποενότητα 6.6 δείξαμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\frac{\partial \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta}$ κατανέμεται σύμφωνα

με κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όταν το πλήθος των παρατηρήσεων τείνει στο άπειρο. Η ασυμπτωτική αυτή ιδιότητα ισχύει λόγω των επιπτώσεων του θεωρήματος του κεντρικού ορίου.

Επιπλέον δείξαμε, ότι η μέση τιμή αυτής της κανονικής συνάρτησης είναι μηδέν και ότι η διασπορά ισούται με:

$$E \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}^{-1} \approx - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta_0} \quad 8.5.6$$

Δείξαμε επίσης ότι, αυτό καθ' εαυτό, το αποτέλεσμα της εκτίμησης κατανέμεται σύμφωνα με κανονική συνάρτηση πιθανότητας, με μέση τιμή ίση με την αληθή τιμή της παραμέτρου και διασπορά που δίνεται από την σχέση 8.5.6. Η ασυμπτωτική αυτή ιδιότητα ισχύει υπό την

επιπλέον προϋπόθεση ότι η παράγωγος $\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2}$ δεν εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου θ ή ότι μεταβάλλεται ελάχιστα στην περιοχή τιμών της παραμέτρου γύρω από την αληθή τιμή.

Σε περιπτώσεις πεπερασμένου πλήθους παρατηρήσεων, όπου οι δύο προαναφερθείσες ασυμπτωτικές ιδιότητες ισχύουν προσεγγιστικά (π.χ. όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι αρκετά μεγάλος) είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να προσδιορισθούν διαστήματα εμπιστοσύνης.

Επισημαίνεται ότι, λόγω των επιπλέον προϋποθέσεων, η κατανομή του αποτελέσματος της εκτίμησης από πεπερασμένο πλήθος δεδομένων προσεγγίζει δυσκολότερα την ασυμπτωτική κανονική συνάρτηση πιθανότητας από ότι η στατιστική συνάρτηση $\frac{\partial \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta}$.

Παράδειγμα 8.5.1

Έστω ένα σύνολο N μετρήσεων της φυσικής ποσότητας X και έστω ότι οι μετρήσεις κατανέμονται σύμφωνα με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} \quad 8.5.7$$

Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας και οι παράγωγοι του δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\ln L(\underline{x}; \theta) = N \cdot \left(\ln \theta + \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N \cdot \theta} \right)$$

$$\frac{\partial \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta} = -\frac{N}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{\theta^2} \quad 8.5.8$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{N}{\theta^2} - \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{\theta^3}$$

Η εκτίμηση της παραμέτρου θ με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας καταλήγει ότι:

$$\left(\frac{\partial \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad 8.5.9$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x; \theta) dx = \theta_0$, εύκολα καταλήγουμε ότι:

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0} = -\frac{N}{\theta_0^2} \quad 8.5.10$$

Η σχέση 8.5.10 προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα ως:

$$\hat{E} \left[\frac{-\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{N}{\hat{\theta}^2} \quad 8.5.11$$

Θεωρούμε ότι αμφότερες οι τυχαίες μεταβλητές, $\hat{\theta}$ και $\frac{\partial \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta}$, κατανέμονται σύμφωνα

με κανονικές συναρτήσεις με $\sigma = E \left[\frac{-\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}^{-1/2} = \frac{\theta_0}{\sqrt{N}}$ και μέσες τιμές ίσες με θ_0 και

μηδέν αντίστοιχα.

Το διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ , με περιεχόμενο πιθανότητας β , ορίζεται ως ακολούθως:

- από την κανονική ασυμπτωτική συμπεριφορά του αποτελέσματος της εκτίμησης

$$-\frac{\lambda_{\beta} \cdot \hat{\theta}}{\sqrt{N}} \leq \hat{\theta} - \theta_0 \leq \frac{\lambda_{\beta} \cdot \hat{\theta}}{\sqrt{N}}$$

$$\hat{\theta} - \frac{\lambda_{\beta} \cdot \hat{\theta}}{\sqrt{N}} \leq \theta_0 \leq \hat{\theta} + \frac{\lambda_{\beta} \cdot \hat{\theta}}{\sqrt{N}} \quad 8.5.12$$

$$\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_{\beta}}{\sqrt{N}}\right) \leq \theta_0 \leq \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \cdot \left(1 + \frac{\lambda_{\beta}}{\sqrt{N}}\right)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η εκτίμηση: $\hat{\sigma} = \hat{E} \left[\frac{-\partial^2 \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\hat{\theta}}^{-1/2} = \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{N}}$

- από την κανονική ασυμπτωτική συμπεριφορά της παραγώγου $\frac{\partial \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta}$

$$-\frac{\lambda_{\beta} \cdot \theta_0}{\sqrt{N}} \leq \frac{-N}{\theta_0} + \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{\theta_0^2} \leq \frac{\lambda_{\beta} \cdot \theta_0}{\sqrt{N}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \leq \theta_0 \leq \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$\frac{N}{1 + \frac{\lambda_{\beta}}{\sqrt{N}}} \leq \theta_0 \leq \frac{N}{1 - \frac{\lambda_{\beta}}{\sqrt{N}}} \quad 8.5.13$$

όπου η παράμετρος λ_{β} ορίζεται ώστε: $\int_{-\lambda_{\beta} \cdot \sigma}^{\lambda_{\beta} \cdot \sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{z^2}{2 \cdot \sigma^2}} dz = \beta$

Παράδειγμα 8.5.2

Η μέθοδος προσδιορισμού διαστήματος εμπιστοσύνης που εκφράζει η σχέση 8.5.13 είναι εν γένει ακριβέστερη της μεθόδου που εκφράζεται από την σχέση 8.5.12 επειδή οι ασυμπτωτικές

ιδιότητες της στατιστικής συνάρτησης $\frac{\partial \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta}$ προσεγγίζονται, με πεπερασμένο πλήθος παρατηρήσεων, σχετικά ευκολότερα από τις ασυμπτωτικές ιδιότητες του αποτελέσματος της

εκτίμησης, $\hat{\theta}$. Επιπλέον, για τον προσδιορισμό του διαστήματος εμπιστοσύνης 8.5.13 χρησιμοποιήθηκε η ακριβής έκφραση της διασποράς, $\sigma^2 = \frac{\theta_0^2}{N}$, ενώ για την σχέση 8.5.12

χρησιμοποιήθηκε η εκτίμηση της διασποράς, $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\theta}^2}{N}$.

Οι συνέπειες των παραπάνω παρατηρήσεων γίνονται εύκολα αντιληπτές στο ακόλουθο αριθμητικό παράδειγμα όπου παράγονται N τιμές της τυχαίας μεταβλητής X σύμφωνα με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας 8.5.7 με $\theta = \theta_0 = 3$. Από κάθε τέτοιο σύνολο N τιμών εκτιμώνται, η τιμή της μεταβλητής θ_0 σύμφωνα με την 8.5.9 καθώς και η τιμή της διασποράς της εκτίμησης και υπολογίζεται η αληθής διασπορά της εκτίμησης. Τέλος, προσδιορίζονται τα όρια στα διαστήματα εμπιστοσύνης 8.5.12 και 8.5.13.

Ερώτηση Περιγράψετε έναν σύντομο τρόπο για την επιλογή N τιμών της μεταβλητής x σύμφωνα με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}$, με $\theta = 3$. Να παράγετε $N = 4000000$ τέτοιες τιμές και να τις παραστήσετε γραφικά με ιστόγραμμα, χρησιμοποιώντας εύρος για κάθε ιστό ίσο με 0.1. Δείξτε ότι πράγματι οι τιμές αυτές κατανέμονται σύμφωνα με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (1).

Υπόδειξη Ορίσετε την μεταβλητή $y = \int_x^\infty \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x'}{3}} dx' = e^{-\frac{x}{3}}$, η οποία μεταβάλλεται ισοπίθانا στο

διάστημα $[0,1]$ όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής x είναι η:

$f(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x}{3}}$. Επιλέξτε ένα τυχαίο αριθμό R στο διάστημα $[0,1]$. Ορίσετε την τιμή $y=R$ και

ορίσετε την τιμή της μεταβλητής x ως: $x = 3 \cdot \ln y$.

Στο Σχήμα 8.5.4 παρίστανται σε ιστόγραμμα $N=4000000$ τιμές της μεταβλητής x .

Εάν πράγματι, η μεταβλητή κατανέμεται με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$f(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x}{3}}$ τότε ο πληθυσμός κάθε ιστού, με μέσο στην τιμή x_i και εύρος $\Delta x = 0.1$, θα

δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} \mu_i &= N \cdot \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} \frac{1}{\theta_1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta_1}} dx = N \cdot e^{-\frac{x}{\theta_1}} \cdot \left[e^{\frac{\Delta x}{2 \cdot \theta_1}} - e^{-\frac{\Delta x}{2 \cdot \theta_1}} \right] \\ &= N \cdot e^{-\frac{x}{\theta_1}} \cdot \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{2 \cdot \theta_1} + K \right) - \left(1 - \frac{\Delta x}{2 \cdot \theta_1} + K \right) \right] \end{aligned} \quad 8.5.14$$

$$; \left(\frac{N \cdot \Delta x}{2} \right) \cdot \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x}{\theta_1}} = \theta_2 \cdot \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x}{\theta_1}}$$

όπου $\theta_1 = 3$ και $\theta_2 = \Delta x \cdot N = 4 \cdot 10^5$.

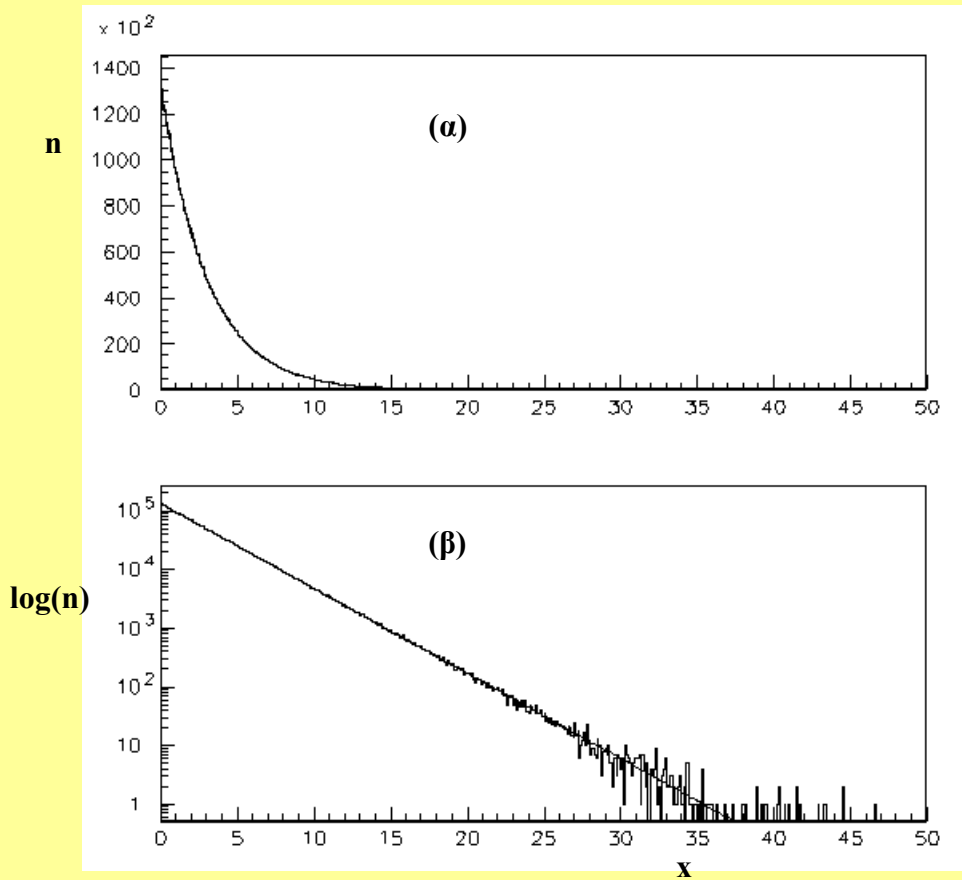
Αντιστρέφοντας τον συλλογισμό, εάν εκτιμήσουμε από το ιστόγραμμα του Σχήματος 8.5.4 τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 θα πρέπει το αποτέλεσμα της εκτίμησης να συμφωνεί με τις αναμενόμενες τιμές.

Η συνάρτηση μεγίστης πιθανοφάνειας δίνεται από το γινόμενο:

$$L_E(\underline{x}; \theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{k=500} \frac{(\mu_i)^{n_i} \cdot e^{-\mu_i}}{n_i!} \quad 8.5.15$$

όπου n_i είναι ο αριθμός των γεγονότων σε κάθε ιστό και $k=500$ ο αριθμός των ιστών στο Σχήμα 8.5.4. Βεβαίως για τους όρους που αντιστοιχούν σε μεγάλο πληθυσμό ιστών μπορεί να γίνει η αντικατάσταση:

$$\frac{(\mu_i)^{n_i} \cdot e^{-\mu_i}}{n_i!} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \mu_i}} \cdot e^{-\frac{(\mu_i - n_i)^2}{2\mu_i}} \quad 8.5.16$$



Σχήμα 8.5.4: Παράσταση σε ιστόγραμμα των τιμών της τυχαίας μεταβλητής x : α) σε γραμμική και β) λογαριθμική κλίμακα. Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στα αποτελέσματα της εκτίμησης των παραμέτρων θ_1 και θ_2 .

Η μεγιστοποίηση της εκτεταμένης πιθανοφάνειας, για τις τιμές της μεταβλητής που παρίστανται στο Σχήμα 8.5.4, καταλήγει στα αποτελέσματα:

$$\theta_1 = 2.9995 \pm 0.0015 \quad \theta_2 = 3999820 \pm 200$$

σεε πολύ καλή συμφωνία με τις αναμενόμενες τιμές.

Το μέσο του διαστήματος 8.5.12 ευρίσκεται για τιμή της παραμέτρου ίση με την εκτίμηση της

αληθούς τιμής $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$ ενώ το ήμισυ του εύρους είναι:

$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \cdot \frac{\lambda_{\beta}}{\sqrt{N}} \quad 8.5.17$$

Επειδή πρόκειται για έλεγχο, όπου γνωρίζουμε εκ των προτέρων την τιμή της αληθούς τιμής $\theta_0=3$, ορίζουμε την ποσότητα:

$$R_1(\lambda_{\beta}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} - 3 \right) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \cdot \frac{\lambda_{\beta}}{\sqrt{N}} \right)^{-1} \quad 8.5.18$$

Είναι προφανές ότι εάν επαναληφθεί η διαδικασία επιλογής N τιμών της τυχαίας μεταβλητής για n φορές, ορίζοντας κάθε φορά το διάστημα εμπιστοσύνης 8.5.12, θα πρέπει $|R_1(\lambda_{\beta})| \leq 1$ για ποσοστό των επαναλήψεων της διαδικασίας ίσο με β .

Ομοίως, ορίζουμε το μέσο του διαστήματος εμπιστοσύνης 8.5.13, $\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda_{\beta}^2}{N}}$, ενώ το ήμισυ

του εύρους είναι:

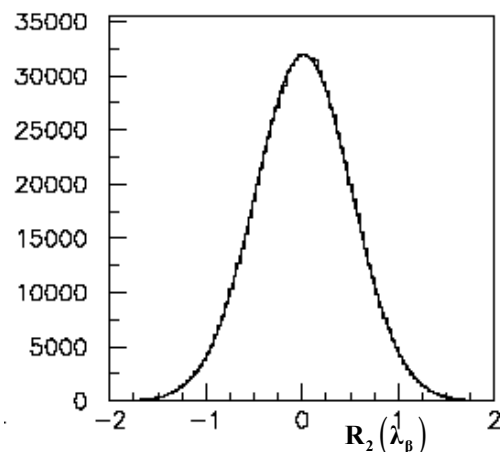
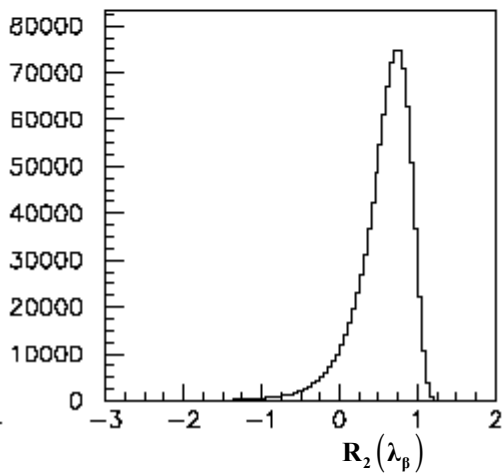
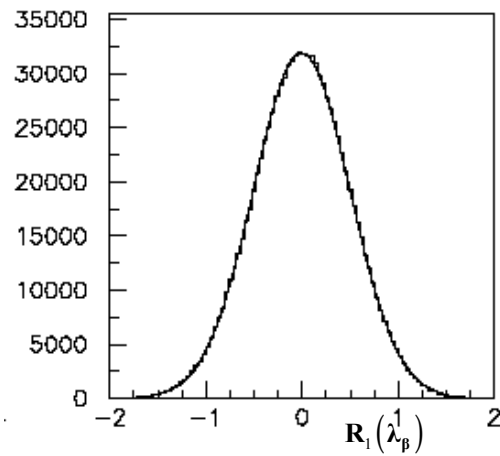
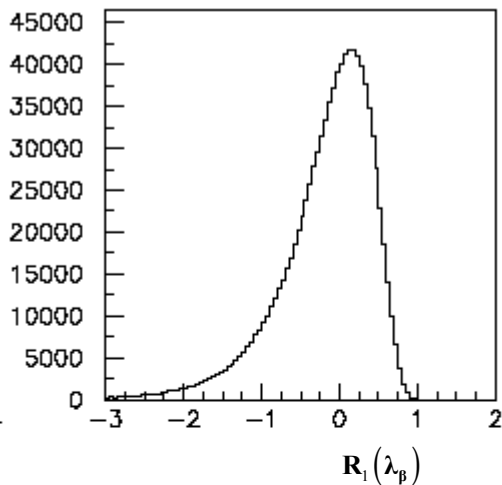
$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \cdot \frac{\frac{\lambda_{\beta}}{\sqrt{N}}}{1 - \frac{\lambda_{\beta}^2}{N}} \quad 8.5.19$$

Κατ' αντιστοιχία της σχέσης 8.5.18 ορίζουμε την ποσότητα:

$$R_2(\lambda_{\beta}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda_{\beta}^2}{N}} - 3 \right) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \cdot \frac{\frac{\lambda_{\beta}}{\sqrt{N}}}{1 - \frac{\lambda_{\beta}^2}{N}} \right)^{-1} \quad 8.5.20$$

και αναμένεται ότι $|R_2(\lambda_{\beta})| \leq 1$ για ποσοστό ίσο με β των επαναλήψεων της επιλογής N τιμών της τυχαίας μεταβλητής x .

Στο Σχήμα 8.5.5 παρίστανται σε ιστόγραμμα οι τιμές των μεταβλητών $R_1(\lambda_\beta)$ και $R_2(\lambda_\beta)$ για $N=9$, $\lambda_\beta=2$ και $n=4000000$ επαναλήψεις της διαδικασίας. Με απλή παρατήρηση του Σχήματος 8.5.5 είναι προφανές ότι σε μεγαλύτερο ποσοστό των επαναλήψεων του αριθμητικού πειράματος η αληθής τιμή της παραμέτρου θ ευρίσκεται εντός του διαστήματος εμπιστοσύνης 8.5.13, $|R_2(\lambda_\beta)| \leq 1$, παρ' ότι εντός του διαστήματος 8.5.12. Πράγματι, για $95.8\% \pm 0.1\%$ ⁸ των περιπτώσεων η αληθής τιμή ευρίσκεται στο διάστημα εμπιστοσύνης 8.5.13 και για $90.3\% \pm 0.1\%$ των περιπτώσεων στο διάστημα 8.5.12. Και οι δύο τιμές αποκλίνουν από την αναμενόμενη τιμή (94.5%) αλλά είναι σαφές ότι η προσέγγιση 8.5.12 υπερέχει σε ακρίβεια.



Σχήμα 8.5.5: Αναπαράσταση σε ιστόγραμμα των μεταβλητών $R_1(\lambda_\beta=2)$ και $R_2(\lambda_\beta=2)$ για $N=9$, όπως προέκυψε από $n=4000000$ επαναλήψεις του αριθμητικού πειράματος.

Σχήμα 8.5.6: Αναπαράσταση σε ιστόγραμμα των μεταβλητών $R_1(\lambda_\beta=2)$ και $R_2(\lambda_\beta=2)$ για $N=100000$, όπως προέκυψε από $n=4000000$ επαναλήψεις του αριθμητικού πειράματος. Οι συνεχείς καμπύλες αντιστοιχούν σε κανονικές συναρτήσεις με μέση τιμή ίση με μηδέν και $\sigma=0.5$.

⁸ Πρόκειται για εκτίμηση που προέκυψε από τον λόγο του αριθμού των περιπτώσεων όπου η απόλυτη τιμή της μεταβλητής R είναι μικρότερη της μονάδας ως προς τον συνολικό αριθμό των επαναλήψεων της διαδικασίας. Ως εκτίμηση, συνοδεύεται από το σφάλμα της εκτίμησης.

Για μεγαλύτερο πλήθος των τυχαίων μεταβλητών, τα δύο είδη διαστήματος εμπιστοσύνης συγκλίνουν προς τις αναμενόμενες τιμές, καθώς εξασφαλίζονται οι προϋποθέσεις ισχύος των ασυμπτωτικών ιδιοτήτων της μεθόδου μεγίστη πιθανοφάνειας.

Επί παραδείγματι, στο Σχήμα 8.5.6 παρουσιάζονται οι κατανομές των μεταβλητών $R_1(\lambda_\beta)$ και $R_2(\lambda_\beta)$ για $N=100000$ επαναλήψεις του αριθμητικού πειράματος. Είναι προφανές ότι οι μεταβλητές $R_1(\lambda_\beta)$ και $R_2(\lambda_\beta)$ κατανέμονται σύμφωνα με κανονική συνάρτηση και για $95.5\% \pm 0.1\%$ των επαναλήψεων η αληθής τιμή της παραμέτρου ευρίσκεται στα διαστήματα εμπιστοσύνης 8.5.12 και 8.5.13.

Άσκηση:

Έστω δύο φυσικά μεγέθη X και Y οι τιμές των οποίων συνδέονται με την γραμμική σχέση:
 $y(x) = a + b \cdot x$ (1)

όπου $a=4$ και $b=12$. Υποθέσετε ότι η τιμή του μεγέθους X προσδιορίζεται με κατάλληλες μετρήσεις χωρίς καθόλου σφάλμα, $x=X$, ενώ οι μετρήσεις, y , των τιμών του μεγέθους Y κατανέμονται σύμφωνα με κανονική συνάρτηση πιθανότητας, με μέση τιμή ίση με την αληθή τιμή του μεγέθους Y , $y(x)$, και διασπορά ίση το εν δέκατο της αληθούς τιμής, $(\sigma(x))^2 = 0.1 \cdot y(x)$.

Θεωρήσετε δέκα τιμές του μεγέθους X και τις αντίστοιχες μετρήσεις τους: $x_1=1.16391$, $x_2=9.64847$, $x_3=8.8297$, $x_4=4.20487$, $x_5=4.95856$, $x_6=5.77386$, $x_7=9.4234$, $x_8=2.43162$, $x_9=5.50127$, $x_{10}=6.8923$.

α) Αναπτύξτε κώδικα λογισμικού προσομοίωσης για να παράγετε τιμές, y_i ($i=1,2,3,\dots,10$), για τα αποτελέσματα των μετρήσεων του μεγέθους Y που να αντιστοιχούν στις προαναφερθείσες τιμές του μεγέθους X .

β) Εκτιμήστε με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τις τιμές των παραμέτρων a και b , χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις $\{x_i, y_i\}$ ($i=1,2,3,\dots,10$) και ως γραμμικό πρότυπο προσαρμογής την σχέση 1.

Εκτιμήστε τα στοιχεία του πίνακα συνδιασποράς των αποτελεσμάτων της εκτίμησης: $\hat{V}[\hat{a}]$, $\hat{V}[\hat{b}]$, $\text{cov}(\hat{a}, \hat{b})$

γ) Παραστήσετε γραφικά τις μετρήσεις και το αποτέλεσμα της προσαρμογής και συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με την αληθή σχέση που συνδέει τα μεγέθη X και Y .

δ) Επαναλάβετε την διαδικασία παραγωγής τιμών για το μέγεθος Y και της εκτίμησης των παραμέτρων πολλές φορές (π.χ. $n=100000$ φορές) και παραστήσετε σε ιστόγραμμα δύο διαστάσεων τις εκτιμήσεις $\hat{a}$ και $\hat{b}$. Επίσης, παραστήσετε σε ιστόγραμμα την τιμή της ποσότητας :

$$\hat{Q}^2(\underline{t}; \underline{\theta}) = (\underline{t} - \underline{\theta})^T \cdot \hat{V}_{\%}^{-1} \cdot (\underline{t} - \underline{\theta})$$

$$\underline{t} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \underline{\theta} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad 2$$

$$\hat{V}_{\%} = \begin{pmatrix} \hat{V}[\hat{a}] & \text{cov}(\hat{a}, \hat{b}) \\ \text{cov}(\hat{a}, \hat{b}) & \hat{V}[\hat{b}] \end{pmatrix}$$

και συγκρίνετε την κατανομή με την συνάρτηση $\chi^2(2)$ για δύο βαθμούς ελευθερίας. Σχολιάσετε.

ε) Σε κάθε επανάληψη του αριθμητικού πειράματος υπολογίστε την ποσότητα:

$$\hat{Q}^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{\left(y_i - (\hat{a} - \hat{b} \cdot x_i)\right)^2}{\sigma_i^2}$$

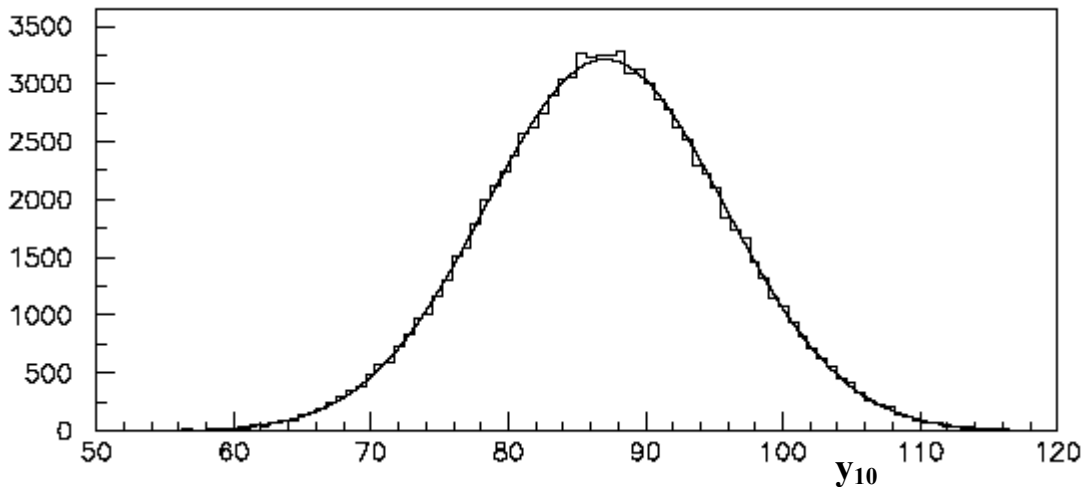
και παραστήσετε την τιμή της σε ιστόγραμμα. Συγκρίνετε την κατανομή των τιμών της ποσότητας $\hat{Q}^2$ με συνάρτηση $\chi^2(8)$ για οκτώ βαθμούς ελευθερίας.

στ) Προτείνετε ένα τρόπο προσδιορισμού διαστήματος εμπιστοσύνης για τις αληθείς τιμές των παραμέτρων a και b . Σχεδιάσετε το διάστημα εμπιστοσύνης με περιεχόμενο πιθανότητας 95 % για την πρώτη εκτίμηση που μελετήσατε στο β) βήμα.

ζ) Επιλέξατε ένα σύνολο μετρήσεων y_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 10$), τέτοιο ώστε τα αποτελέσματα της εκτίμησης των παραμέτρων να αποκλίνουν σημαντικά από τις αληθείς τιμές. Σχεδιάσετε το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης για 95% περιεχόμενο πιθανότητας και συγκρίνετε με τις αληθείς τιμές.

Υπόδειξη:

α) Χρησιμοποιήσετε μία από τις μεθόδους που περιγράφονται στην υποενότητα 4.8. Επί παραδείγματι στο Σχήμα 1 παρίστανται ως ιστόγραμμα τα αποτελέσματα της επιλογής μεγάλου πλήθους τιμών με την μέθοδο απόρριψης. Οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής αντιστοιχούν σε πιθανά αποτελέσματα της μέτρησης του 10^{00} σημείου (x ίσο με 6.8923). Η συνεχής καμπύλη παριστά γραφικά κανονική συνάρτηση με $\mu = y(x=6.8923) = 87.0$ και $\sigma = 8.7$.

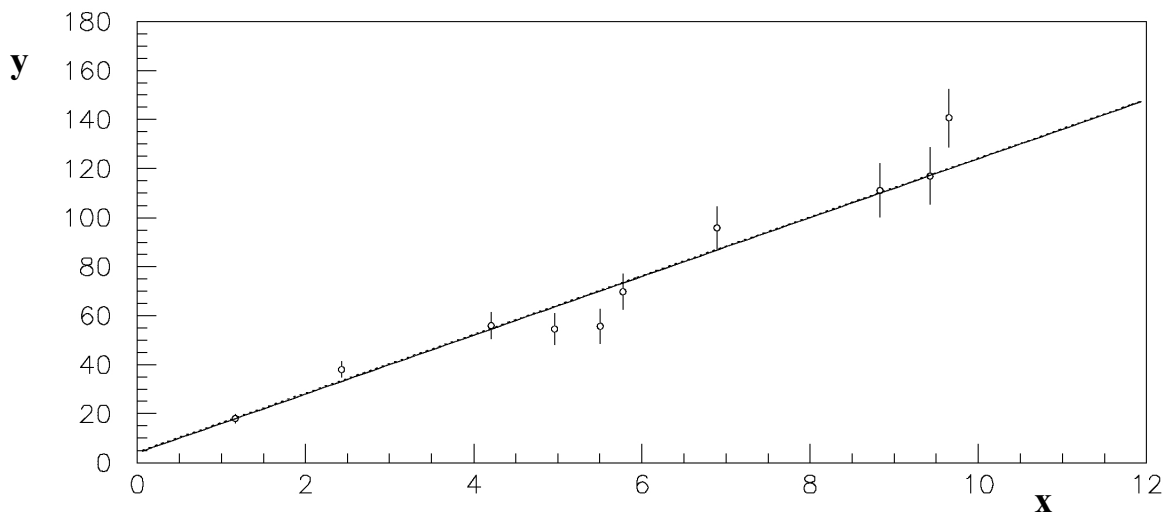


Σχήμα 1: Παράσταση σε ιστόγραμμα των επιλεγέντων τιμών για την μέτρηση y_{10} . Η συνεχής καμπύλη παριστά κανονική συνάρτηση με παραμέτρους, $\mu=87$ και $\sigma=8.7$

β) Οι τιμές των παραμέτρων, a και b , καθώς και τα στοιχεία του πίνακα συνδιασποράς εκτιμώνται σύμφωνα με τις σχέσεις 6.9.29 και 6.9.30.

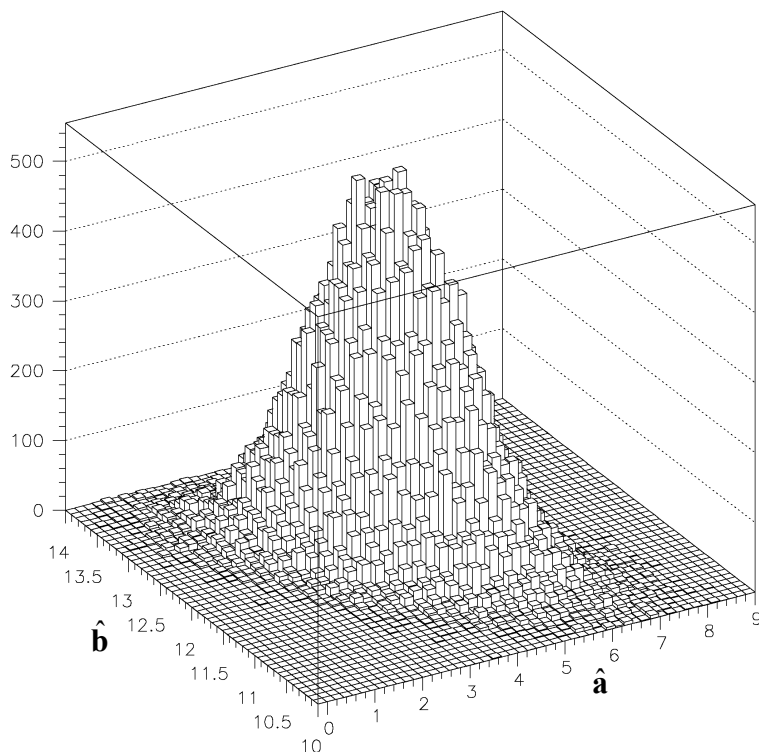
γ) Στο Σχήμα 2 παρίστανται γραφικά τα αποτελέσματα των μετρήσεων. Οι τιμές που αντιστοιχούν στις μετρήσεις της ποσότητας Y παρήχθησαν σύμφωνα με κανονικές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Τα κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα, πάνω και κάτω από κάθε σημείο, παριστούν το σφάλμα κάθε μέτρησης και το μήκος τους αναλογεί σε ένα σ .

Η ευθεία γραμμή $\hat{y}(x) = \hat{a} + \hat{b} \cdot x$ παρίσταται γραφικά ως συνεχής γραμμή στο Σχήμα 2 και συμπίπτει πρακτικά με την αληθή καμπύλη που συνδέει τα μεγέθη Y και X (διακεκομμένη γραμμή στο Σχήμα 2).



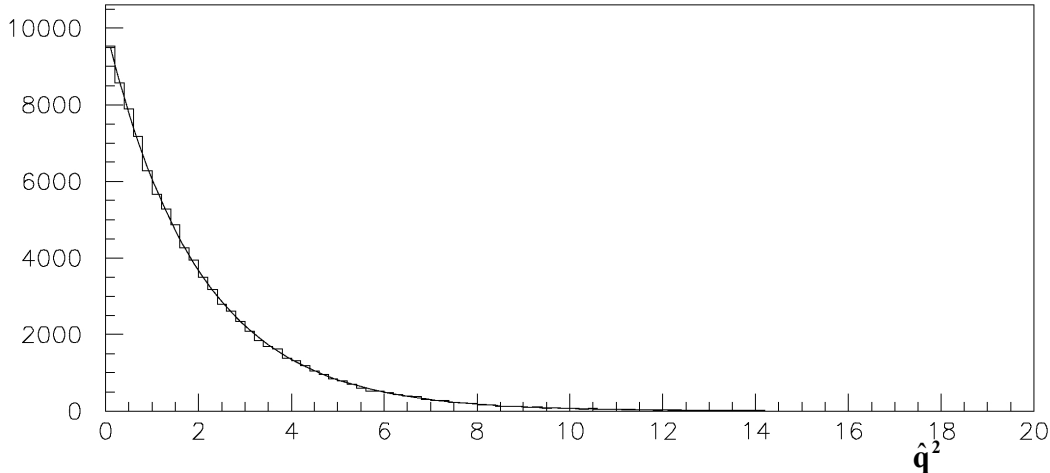
Σχήμα 2: Γραφική αναπαράσταση των μετρήσεων. Η συνεχής γραμμή παριστά το αποτέλεσμα της εκτίμησης ενώ η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην αληθή σχέση που συνδέει τα μεγέθη X και Y .

Στο Σχήμα 3 παρίστανται γραφικά, σε μορφή ιστογράμματος δύο διαστάσεων, τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων που προέκυψαν από την επανάληψη για $n=100000$ φορές της διαδικασίας επιλογής τιμών για τις μετρήσεις y και εκτίμηση των παραμέτρων (100000 αριθμητικά πειράματα). Κατ' αρχήν παρατηρήσετε ότι η κατανομή ομοιάζει προς κανονική.



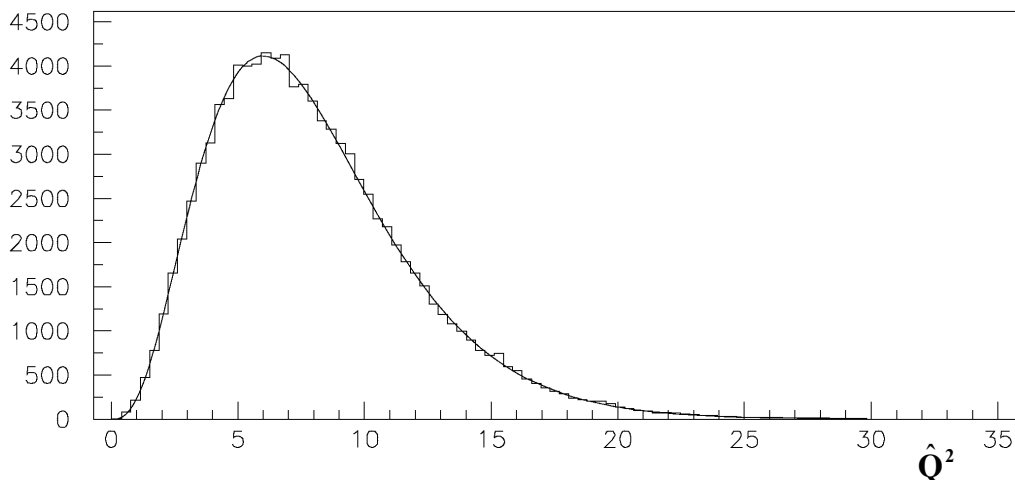
Σχήμα 3: Γραφική παράσταση σε ιστόγραμμα των αποτελεσμάτων εκτίμησης των παραμέτρων a και b .

δ) Στο Σχήμα 5 παρίστανται οι τιμές της ποσότητας $\hat{q}^2$ που υπολογίζεται σε κάθε εκτίμηση παραμέτρων, για $n=100000$ αριθμητικά πειράματα. Η συνεχής καμπύλη παριστά γραφικά συνάρτηση ανάλογη με την συνάρτηση $\chi^2(2)$ (στην πραγματικότητα την συνάρτηση $100000 \cdot \chi^2(2)$) για δύο βαθμούς ελευθερίας. Η άριστη συμφωνία της θεωρητικής καμπύλης με την κατανομή της ποσότητας $\hat{q}^2$, επιβεβαιώνει ότι πράγματι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων a και b κατανέμονται σύμφωνα με κανονική συνάρτηση πιθανότητας.



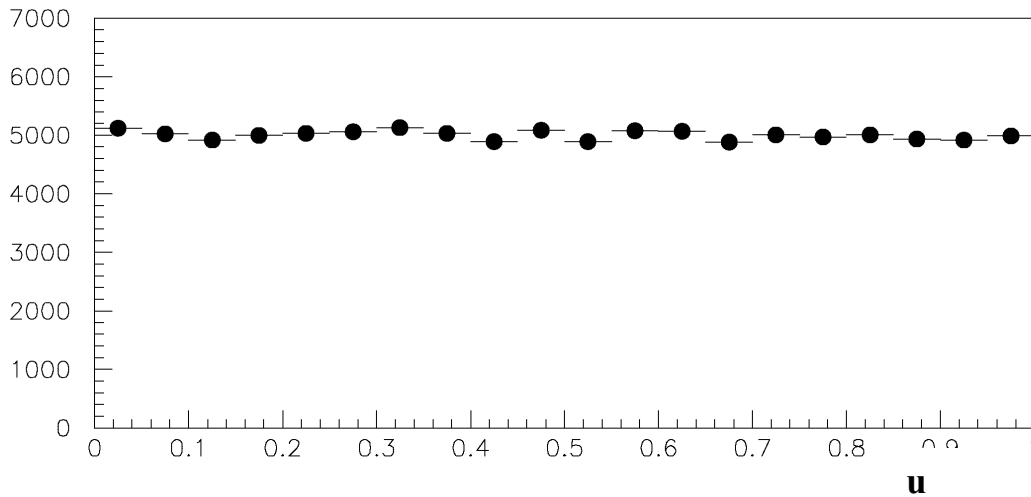
Σχήμα 5. Η κατανομή των τιμών των ποσοτήτων $\hat{q}^2$, όπως προκύπτουν από τα 100000 αριθμητικά πειράματα

ε) Στο Σχήμα 6 παρίστανται οι τιμές της ποσότητας $\hat{Q}^2$ η οποία υπολογίζεται σε κάθε εκτίμηση παραμέτρων, για $n=100000$ αριθμητικά πειράματα. Η συνεχής καμπύλη παριστά γραφικά συνάρτηση ανάλογη με την συνάρτηση $\chi^2(8)$ (στην πραγματικότητα την συνάρτηση $100000 \cdot \chi^2(8)$) για οκτώ βαθμούς ελευθερίας. Η άριστη συμφωνία της θεωρητικής καμπύλης με την κατανομή της ποσότητας $\hat{Q}^2$, επιβεβαιώνει τις ιδιότητες της μεθόδου εκτίμησης ελαχίστων τετραγώνων.



Σχήμα 6. Η κατανομή των τιμών των ποσοτήτων $\hat{Q}^2$, όπως προκύπτουν από τα 100000 αριθμητικά πειράματα

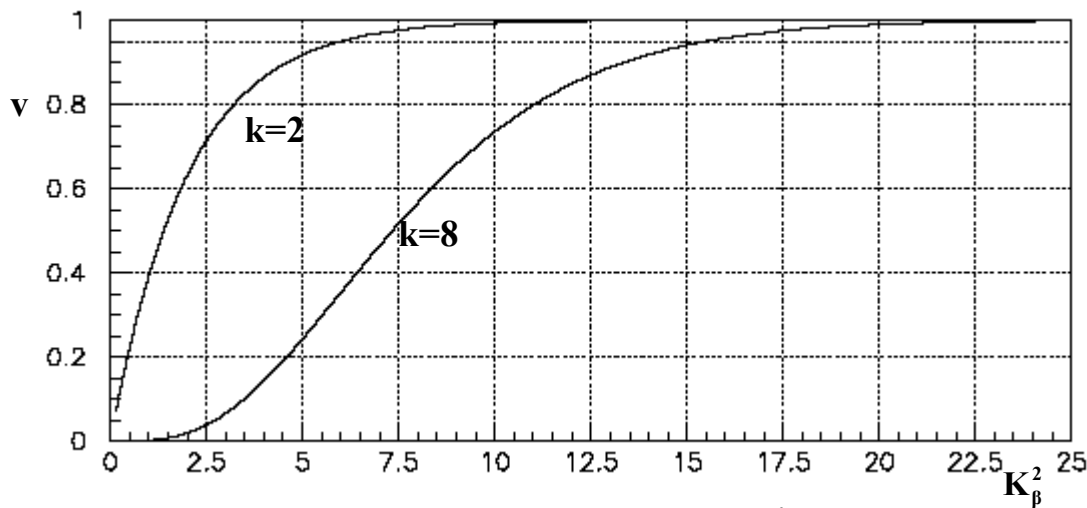
Επισημαίνεται ότι, όπως αναλύθηκε στο παράδειγμα 6.9.3 (βλέπε και Σχήμα 6.9.3) , η ποσότητα $u = \int_{Q^2}^{\infty} P(\chi^2) d\chi^2$ θα πρέπει να περιγράφεται από ισοπίθανη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, ακριβώς όπως συμπεριφέρονται τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7: Η κατανομή των τιμών των ποσοτήτων $u = \int_{Q^2}^{\infty} P(\chi^2) d\chi^2$, όπως προκύπτουν από τα 100000 αριθμητικά πειράματα

στ) Επειδή οι εκτιμήσεις κατανέμονται σύμφωνα με κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και κατά συνέπεια η ποσότητα $\hat{q}^2$ κατανέμεται σύμφωνα με $\chi^2(2)$ συνάρτηση πιθανότητας, εφαρμόζεται η μέθοδος που αναπτύχθηκε στην υποενότητα 8.2 (Παράδειγμα 8.2.1) .

Στο Σχήμα 8 παρίσταται το ολοκλήρωμα της πιθανότητας $\chi^2(k)$ $v = \int_0^{K_\beta^2} P(\chi^2; k) d\chi^2$ για $k=2$ και $k=8$ βαθμούς ελευθερίας από όπου συνάγεται ότι η περιοχή με περιεχόμενο πιθανότητας $\beta=95\%$ αντιστοιχεί σε $K_\beta^2 \approx 16$ και $K_\beta^2 \approx 15.5$ για $k=2$ και $k=8$ βαθμούς ελευθερίας αντίστοιχα.

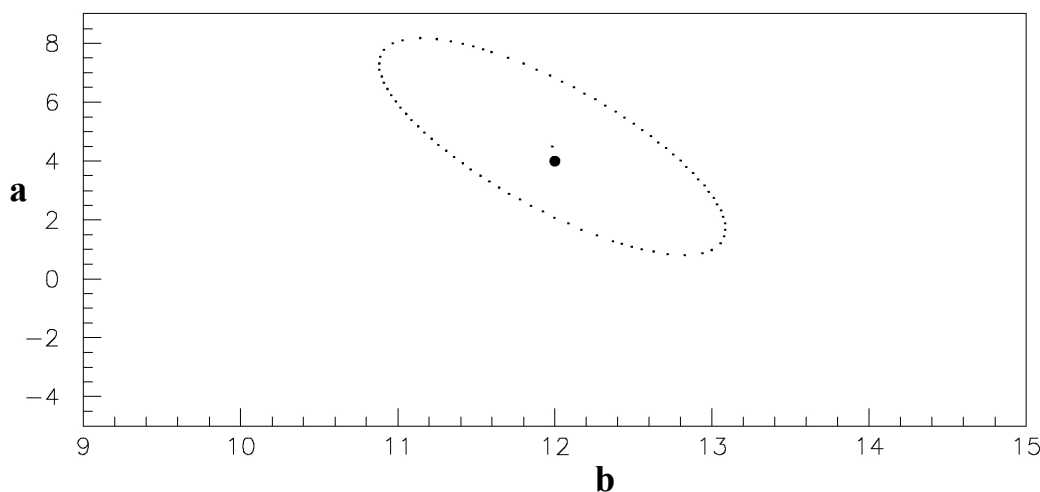


Σχήμα 8: Γραφική παράσταση του ολοκληρώματος: $v = \int_0^{K_\beta^2} P(\chi^2; k) d\chi^2$, συναρτήσεως του ορίου K_β^2 , για $k=2$ και $k=8$ βαθμούς ελευθερίας.

Στο Σχήμα 9 παρίσταται γραφικά η κεντρική περιοχή εμπιστοσύνης

$$\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}[\hat{a}] & \text{cov}(\hat{a}, \hat{b}) \\ \text{cov}(\hat{a}, \hat{b}) & \hat{V}[\hat{b}] \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = K_\beta^2 = 6$$

όπου $\hat{a}$ και $\hat{b}$ είναι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων από το αριθμητικό πείραμα που παριστά το Σχήμα 2.



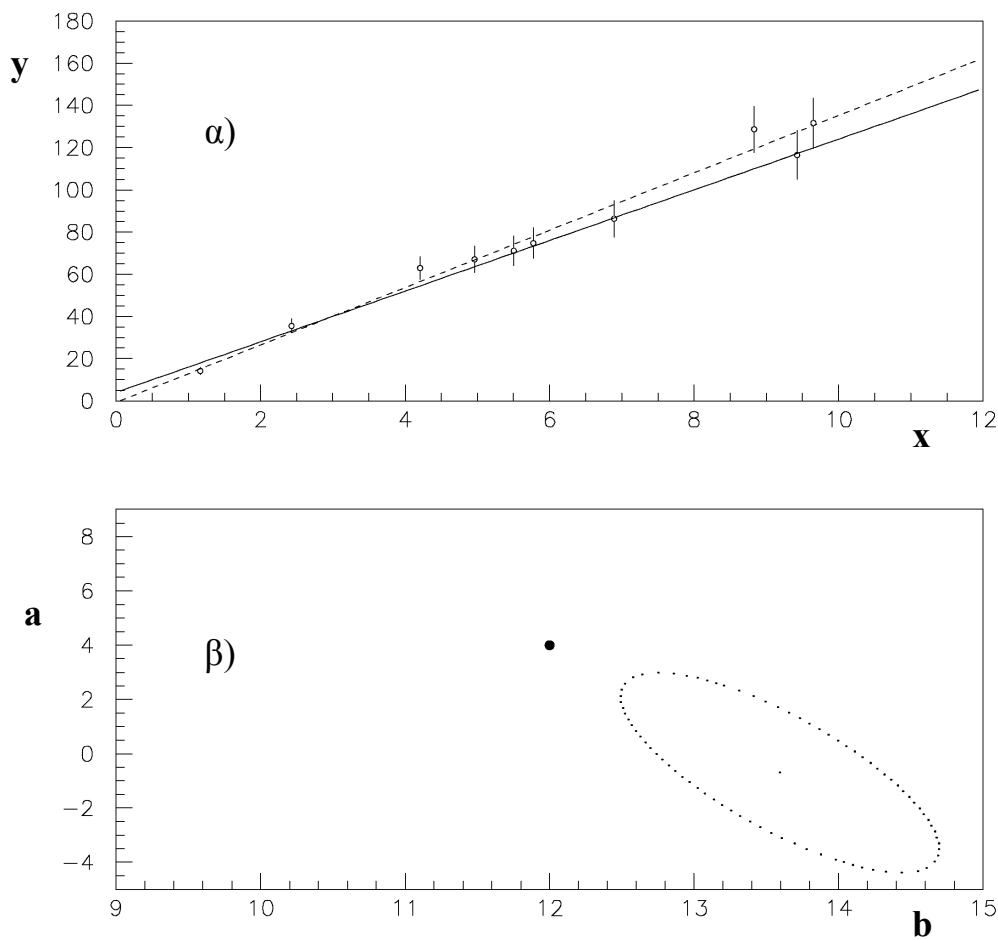
Σχήμα 8: Το εσωτερικό της έλλειψης παριστά την περιοχή εμπιστοσύνης για τις αληθείς τιμές των παραμέτρων a και b , όπως προκύπτει από την προσαρμογή που παρίσταται γραφικά στο Σχήμα 2. Ο συμπαγής κύκλος σημειοδοτεί τις αληθείς τιμές.

Στην ίδια περιοχή εμπιστοσύνης καταλήγει και η συνθήκη:

$$\hat{Q}^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{\left(y_i - (\hat{a} - \hat{b} \cdot x_i)\right)^2}{\sigma_i^2} = K_{\beta}^2 = 16.5$$

που αναφέρεται στην συμπεριφορά των ελαχίστων τετραγώνων σύμφωνα με χ^2 συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για 8 βαθμούς ελευθερίας.

ζ) Στο Σχήμα 9.α παρίστανται τα αποτελέσματα ενός από τα αριθμητικά πειράματα όπου οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων αποκλίνουν σημαντικά από τις αληθείς τιμές. Στο Σχήμα 9.β παρίσταται γραφικά η περιοχή εμπιστοσύνης, όπως προσδιορίστηκε από τα αποτελέσματα αυτού του πειράματος. Η αληθείς τιμές ευρίσκονται εκτός του διαστήματος εμπιστοσύνης.



Σχήμα 9: Αποτελέσματα μη επιτυχούς προσαρμογής. α) Γραφική παράσταση των μετρήσεων. Η συνεχής γραμμή παριστά το αποτέλεσμα της εκτίμησης η οποία αποκλίνει από την αληθή γραμμική σχέση (διακεκομμένη γραμμή) που συνδέει τα μεγέθη X και Y. β) Περιοχή εμπιστοσύνης με περιεχόμενο πιθανότητας 95%. Οι αληθείς τιμές (συμπαγής κύκλος) κείνται έξω της περιοχής εμπιστοσύνης.